یازدهمی ها

- بهترین منابع کنکوری
- خلاصه نویسی های دبیران
- جزوات دبیرات و رتبه های برتر کنکور

جهت عضویت کلیک کنید

جزوه جمع بندی
ریاضی یازدهم
ویژه شب امتحان

شامل خلاصه درسنامه
و نمونه سوالات ویژه امتحانات ترم

مهندس مجتبی لشینی

فیلم های حل پاسخ های تشریحی در کانال تلگرام قرار می گیرد

@riaziT

فصل اول

1- شیب خط: شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان 2 نقطه: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$: شیب خط

اگر معادله خط به صورت $ax+by+c=0$ باشد، آن‌گاه: $m=-\dfrac{x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}$

2- نوشتن معادله خط: اگر مختصات 2 نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از خط را داشته باشیم. می‌توانیم معادله آن را بنویسیم بدین‌صورت که ابتدا شیب خط را نوشته و سپس یکی از 2 نقطه را در فرمول $y-y_0=m(x-x_0)$ را جای‌گذاری می‌کنیم. $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$

3- وضعیت 2 خط: 2 خط L_1 و L_2 را با شیب‌های m_1 و m_2 را در نظر بگیرید.

I) اگر $m_1=m_2$ باشد، آن‌گاه 2 خط موازی‌اند.

II) اگر $m_1\times m_2=-1$ باشد، آن‌گاه 2 خط بر هم عمودند.

4- فاصله 2 نقطه:

$$\begin{cases}A=(x_1,y_1)\\B=(x_2,y_2)\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

5- مختصات نقطه وسط پاره‌خط: اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند، مختصات نقطه M، وسط پاره‌خط AB برابر است با: $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

6- فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $AH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

معادله درجه 2: هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ یک معادله درجه دوم می‌باشد. اگر x_1 و x_2، ریشه‌های این معادله باشند: $\Delta=b^2-4ac\Rightarrow x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

روش تغییر متغیر: برای حل معادلات به شکل $a\square^2+b\square+c=0$، باید از تغییر متغیر $t=\square$ استفاده کنیم تا معادله به یک معادله به فرم درجه 2 تبدیل شود:

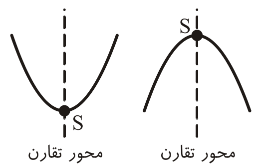
مثال: اگر معادله x^4-10x^2+9 باشد، با تغییر متغیر $t=x^2$، به معادله درجه دوم $t^2-10t+9=0$ می‌رسیم.

روابط بین ریشه‌ها: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، آن‌گاه:

1) $x_1+x_2=S=\dfrac{-b}{a}$ 2) $x_1\times x_2=P=\dfrac{c}{a}$ 3) $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

سهمی: سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ همواره به یکی از دو صورت مقابل است:



1- در شکل‌های روبه‌رو نقطه S رأس سهمی هستند. $S(x,y)=S(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a})$

2- اگر $a>0$ باشد، سهمی دارای پایین‌ترین نقطه یا مینیمم و اگر $a<0$ باشد، سهمی دارای بالاترین نقطه یا ماکزیمم است.

صفرهای تابع درجه 2: نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

@riazi_sh

در یک معادله درجه دوم اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله 2 ریشه حقیقی متمایز دارد و اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه ندارد.

اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $\Delta > 0$ باشد:

$1-P<0 \Rightarrow$ معادله 2 ریشه مختلف‌العلامت دارد. $2-P>0 \rightarrow$ معادله 2 ریشه هم‌علامت‌اند.

$$3-P=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

مثال: حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطه $f(x)=mx^2+2mx+m+1$ ، همواره بالای محور xها قرار گیرد را مشخص کنید.

حل : برای آن‌که سهمی بالای محورها باشد، باید، $0 \geq$ ضریب x^2 و $\Delta < 0$ شوند.

$I)\, m \geq 0$

$II)\, \Delta < 0 \Rightarrow b^2-4ac = 4m^2-4(m)(m+1) = 4m^2-4m^2-4m < 0 \Rightarrow m > 0$

اگر $m=0$ هم باشد، آن‌گاه $f(x)=1$ درمی‌آید که خط $y=1$ بالای محور xهاست. پس به ازای $m \geq 0$ نمودار تابع f همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد.

معادلات گویا:

معادلات 2 کسری: هرگاه رابطه‌ی $\dfrac{h}{z}=\dfrac{x}{y}$ برقرار باشد، برای حل معادله، طرفین، وسطین می‌کنیم $(xz=yh)$، معادله را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن‌که مخرج هیچ 2 کسر را صفر نکند، قابل قبول است.

مستطیل طلایی: اگر x را طول مستطیل و y را عرض مستطیل در نظر بگیریم:

$$\frac{\text{مجموع طول و عرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

معادلات رادیکالی: هرگاه رابطه‌ی $\sqrt{A}=B$ برقرار باشد. برای حل معادله، طرفین را به توان 2 می‌رسانیم و معادله‌ی $A=B^2$ را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن‌که عبارت زیر رادیکال و عبارت B را صفر نکند، قابل قبول است.

@riazi_sh

۱) دو نقطهٔ $A(14,3)$ و $B(10,-13)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB بدست آورید.

۲) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۳) یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را بدست آورید.

۴) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب – فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید.

۵) تعیین کنید کدام‌یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام‌یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هریک را مشخص کنید.

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

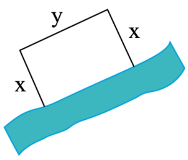
۶) نقاط $A(2,0)$، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ را در نظر بگیرید:

الف – محیط مثلث ABC را بدست آورید.

ب – ABC چه نوع مثلثی است؟

پ – مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۷) قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



۸) معادلات زیر را حل کنید.

الف

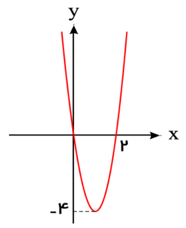
$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

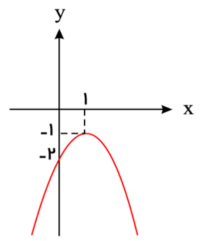
ب

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

@riazi_sh

۹ معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.

الف


ب


۱۰ معادلات زیر را حل کنید.

الف
$۲x = ۱ - \sqrt{۲ - x}$

ب
$\sqrt{x + ۷} = \sqrt{x} + ۱$

۱۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

۱۲ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف
$\sqrt{t + ۴} = ۳$

۱۳ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳mx + ۴ = ۰$ باشند. m را چنان بیابید که $\alpha\beta^۲ + ۴ = ۰$

۱۴ در معادله‌ی $۲x^۲ - ۹x + m + ۳ = ۰$ ، مقدار m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌ها نصف ریشه‌ی دیگر باشد.

۱۵ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\beta^۲}{\alpha} + \frac{\alpha^۲}{\beta}$ را بدست آورید.

۱۶ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۳\beta + \alpha\beta^۳$ را بدست آورید.

@riazi_sh

فصل دوم

1- دایره: دایره به مرکز o و شعاع r را با $C(o,r)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم هر نقطه که روی دایره قرار دارد به فاصله r از نقطه o قرار دارد و هم‌چنین هر نقطه‌ای که فاصله آن از نقطه o برابر r باشد، روی دایره $C(o,r)$ قرار می‌گیرد.

2- رسم مثلثی که طول سه ضلع آن معلوم باشد.

مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن 4، 5 و 6 باشد.

حل: ابتدا پاره‌خط BC را به طول 6 رسم می‌کنیم. اگر نقطه A به فاصله 4 از B و به فاصله 5 از C باشد، آن‌گاه برای پیدا کردن نقطه A، به مرکز B و شعاع 4 و هم‌چنین به مرکز C و شعاع 5 دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دو دایره هم‌دیگر را در دو نقطه A قطع می‌کنیم.

3- شرط آن‌که اعداد a، b و c اضلاع مثلث باشند، این است که: $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$

4- عمود منصف: عمود منصف پاره‌خط AB، خطی است که از نقطه M وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است.

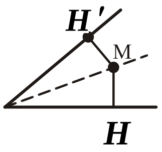
5- ترسیم عمود منصف پاره‌خط AB:

دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و یک بار به مرکز نقطه A و یک بار هم به مرکز نقطه B، دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دو دایره یک‌دیگر را در نقاط M و M' قطع می‌کنند. خط گذرنده از دو نقطه M و M' عمود منصف AB است.

6- نیمساز: نیمساز خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

$MH=MH'$



نسبت و تناسب: هرگاه رابطه‌ی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برقرار باشد، داریم:

1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

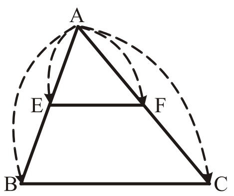
3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات

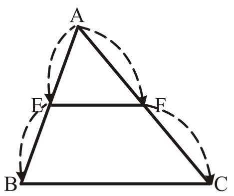
استدلال استنتاجی: استدلالی است که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، بیان شود.

قضیه تالس: اگر در مثلث ABC، پاره‌خط EF موازی ضلع BC باشد، داریم:



$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

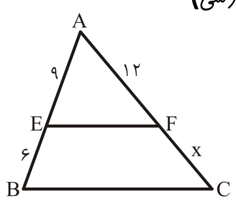
جزء به کل



$\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FC}$

جزء به جزء

مثال: در مثلث ABC، EF موازی BC است، طول پاره‌خط FC و AC کدام است؟ *(کتاب درسی)*



حل:

$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{9}{6}=\frac{12}{x}\Rightarrow x=8=FC$

$AC=AF+FC=12+8=20$

عکس قضیه: اگر فرض و حکم یک قضیه را جا به جا کنیم، آن‌چه که حاصل می‌شود، عکس قضیه است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

@riazi_sh

مثال: قضیه: اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

عکس قضیه: اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

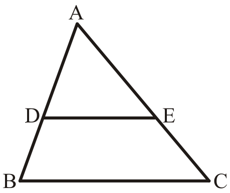
برهان خلف: نوعی استدلال در مسائل ریاضی است. در این روش، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد، آن‌گاه با استفاده از استدلال استنتاجی به یک تناقض می‌رسیم و به این ترتیب درستی حکم ثابت می‌شود.

مراحل اثبات به روش برهان خلف:

مسئله : (فرض) $A \Rightarrow$ (حکم) B

A درست، B نادرست $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ (1) A درست نیست. / (2) تناقض منطقی $\Rightarrow$ پس نتیجه می‌گیریم، حکم B درست است.

عکس قضیه تالس: در شکل روبه‌رو، اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آن‌گاه: $DE \parallel BC$



قضیه دوشرطی:

گاهی عکس یک قضیه درست است، در این صورت عکس قضیه، خود نیز یک قضیه است. چنین قضیه‌ای را قضیه دوشرطی می‌گوییم، قضیه‌های دوشرطی را با نماد $\Leftrightarrow$ بیان می‌کنیم.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی ایجاد می‌شود که با مثلث اولیه متشابه است.

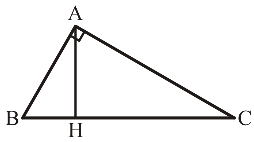
قضیه: هرگاه 2 زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیه: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد و زاویه بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه است.

قضیه: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

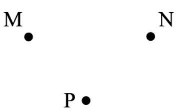
قضیه: هرگاه در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر رسم شود، داریم:

$$\begin{cases} AH^2 = BH \times CH \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases}$$



۱) نقاطی از یک صفحه را پیدا کنید که از دو نقطه‌ی A و B در آن صفحه به یک فاصله بوده و از خط مفروض d در همان صفحه به فاصله‌ی معلوم a باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث شود.)

۲) سه نقطه‌ی M، N و P وسط اضلاع مثلث ABC می‌باشد نحوه‌ی رسم مثلث ABC را توضیح دهید.



۳) مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۵ و ۷ باشد.

۴) اگر $\frac{۲}{۳} = \frac{۵a + ۲b}{۵a + ۴b}$ باشد نسبت $\frac{a}{b}$ را بدست آورید.

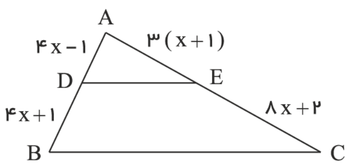
@riazi_sh

۵) در هر مورد، مقدار عددی $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

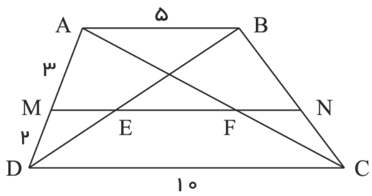
الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

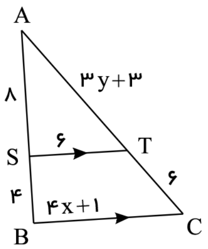
۶) در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.



۷) در ذوزنقه شکل روبرو $AB \parallel MN$ است. طول پاره‌خط EF را بدست آورید.



۸) در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را بدست آورید.



۹) هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

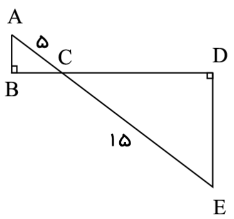
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

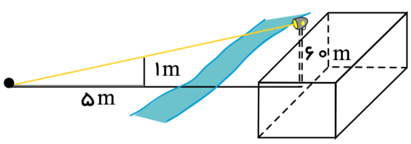
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق هستند.

۱۰) با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط، دو خط عمود بر آن خط رسم کرد.

۱۱) در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.



۱۲) بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



@riazi_sh

فصل سوم

تابع: به رابطه‌ای تابع گفته می‌شود که به ازای هر x (روی دامنه) دقیقاً یک $f(x)$ دریافت کنیم.

توابع گویا: هر تابعی به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$، چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست. مثل $f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$

دامنه توابع گویا: از سال‌های گذشته می‌دانیم که مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد، پس اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند، عضو دامنه نیستند: $Df = R-\{$ریشه‌های مخرج$\}$

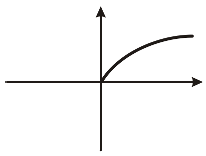
مثال: دامنه تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$ را به دست آورید.

حل :
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+x}{x(x-1)}\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow Df=R-\{0,1\}$$

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را برابر نامیم، هرگاه:
- **الف)** دامنه توابع قبل از ساده کردن با هم برابر باشند.
- **ب)** ضابطه 2 تابع بعد از ساده کردن با هم برابر باشند.

مثال: 2 تابع $f(x)=\dfrac{3x}{x}$ و $g(x)=3$ با هم برابر نیستند زیرا دامنه تابع f برابر است با $R-\{0\}$ ولی دامنه تابع g برابر است با R.

توابع رادیکالی: هر تابعی به شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ را یک تابع رادیکالی می‌گوییم که در آن، $P(x)$ منفی نیست.

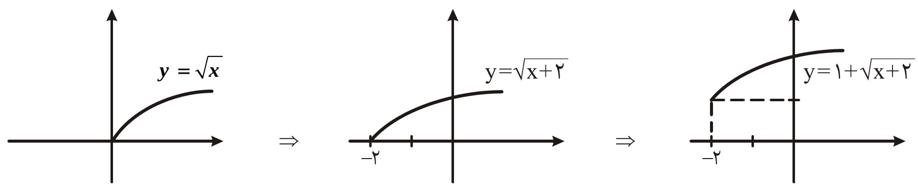


رسم توابع رادیکالی: نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل می‌باشد.

1- اگر x با عددی مثل a $(a>0)$ جمع شود، نمودار به اندازه a به سمت چپ و اگر x از عدد مثل a $(a>0)$ کم شود، نمودار به اندازه a به سمت راست منتقل می‌شود.

2- اگر y با عدد مثل b $(b>0)$ جمع شود، نمودار به اندازه b به سمت بالا و اگر y از عدد مثل b $(b>0)$ کم شود، نمودار به اندازه b به سمت پایین منتقل می‌شود.

مثال: نمودار تابع $y=1+\sqrt{x+2}$ کدام است؟



توابع جزء صحیح: تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح به خود همان عدد را نسبت می‌دهد و هر عدد غیرصحیح را به سمت پایین رند می‌کند. $[x]=a\Leftrightarrow a\le x<a+1$

مثال:

1) $[5]=5$ 2) $[4/5]=4$ 3) $[-1/5]=2$

نکته : $[x\pm n]=[x]\pm n$

مثال: مجموعه جواب معادله $[x+1]+2[x]=7$ کدام است؟

حل :
$$[x+1]+2[x]=7\Rightarrow[x]+1+2[x]=7\Rightarrow 3[x]=6\Rightarrow[x]=2\Rightarrow\boxed{2\le x<3}$$

@riazi_sh

وارون یک تابع: اگر در تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب است، جای مؤلفه‌ها را عوض کنیم، مجموعه جدیدی از زوج مرتب به دست می‌آید که به آن وارون تابع تابع f می‌گوییم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال: وارون تابع $f=\{(1,2),(3,4)\}$ برابر است با $f^{-1}=\{(2,1),(4,3)\}$

نکته: نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند.

به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع:

کافی است که ابتدا x را برحسب y حساب کنیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از $f^{-1}(x)$ استفاده کنیم.

مثال: ضابطه وارون تابع $f(x)=2x-1$ کدام است؟

حل :

$$y=2x-1 \Rightarrow 2x=y+1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$$

تابع یک به یک: به تابعی که در زوج مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گویند.

مثال: اگر تابع $f=\{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$ یک به یک باشد، a را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases}(-1,3)\in f\\ (m,3)\in f\end{cases} \Rightarrow m=-1 \Rightarrow f=\{(-2,2),(-1,3),(-2,a)\} \Rightarrow a=2$$

اعمال روی توابع: دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g را در نظر می‌گیریم:

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و $D_{f+g}=D_f \cap D_g$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ و $D_{f-g}=D_f \cap D_g$

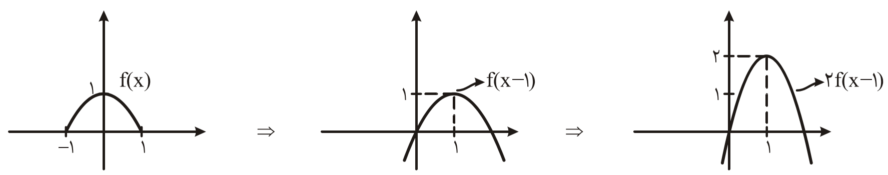
3) $(f.g)(x)=f(x)\times g(x)$ و $D_{f.g}=D_f \cap D_g$

4) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ و $D_{\frac{f}{g}}=\{D_f \cap D_g \mid g(x)\neq 0\}$

رسم نمودار $kf(x)$ از روی $f(x)$:

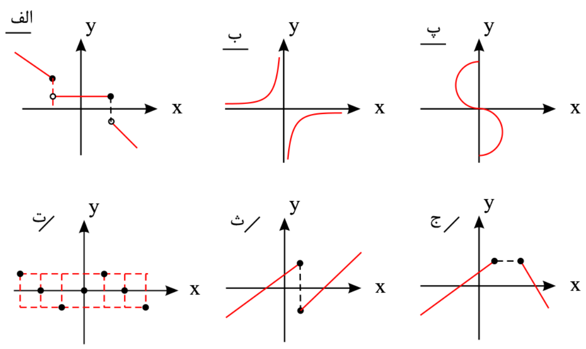
برای رسم نمودار تابع با ضابطه $kf(x)$ کافی است، عرض هر نقطه از نمودار تابع $f(x)$ را، k برابر کنیم.

مثال: براساس نمودار تابع $f(x)$ ، نمودار تابع $2f(x-1)$ را رسم کنید.



رسم نمودار $-f(x)$ ⇐ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $-f(x)$ به دست آید.

۱ کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟



@riazi_sh

۲ به ازای چه مقادیری از a و b رابطه‌ی زیر یک تابع است؟

$$f=\{(۲,a-b),(a,۲b+a),(۲,۳),(a,۲a-۱)\}$$

۳ دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

الف

$$k(x)=\frac{۴x^۲+۳}{x^۲-۳x-۱۰}$$

ب

$$f(x)=\frac{۲x^۲+۵}{x^۴-۵x^۲+۴}$$

۴ با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y=\sqrt{x}-۲ \quad , y=-۳+\sqrt{x-۴} \ , y=\sqrt{x+۱}+۳$$

$$y=-\sqrt{x}-۱ \ , y=-\sqrt{x+۶}-۱$$

۵ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases} \quad , \quad g(x)=\frac{|x|}{x}$

ب) $f(x)=x-۲ \quad , \quad g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$

۶ آیا دو تابع $f(x)=\frac{۳(x^۲-۱)}{x-۱}$ و $g(x)=۳x+۳$ با هم برابرند؟

۷ نمودار تابع $y=۲[x]+۱$ را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۸ مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید.

$$[x+۲]=۵$$

$$-۲[x-۱]=۶$$

$$[۲x-۳]=۱$$

۹ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$[۲\sqrt{۳}-۱] \qquad [\sqrt{۲}+۳]$$

$$\left[-\frac{۴۹}{۱۶}\right] \qquad \left[\frac{\pi}{۲}+۴\right]$$

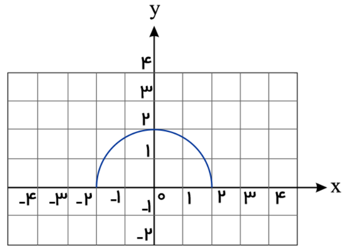
$$[-\sqrt{۷}-۲] \qquad [۱/۵+\sqrt{۲}]$$

$$\left[-\frac{\pi}{۳}\right]$$

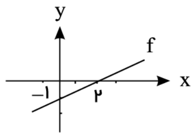
@riazi_sh

۱۰) اگر تابع $f=\{(3,5),(4,-6),(a+1,5),(2a,3b)\}$ یک به یک باشد، a و b را بدست آورید.

۱۱) با حذف بخشی از نمودار نیم دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



۱۲) اگر نمودار تابع f بصورت شکل روبرو باشد، ضابطهٔ وارون آن را بدست آورید.



۱۳) ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=5x-2$

ب) $f(x)=\frac{3}{5}x+4$

پ) $f(x)=\frac{-7x+3}{5}$

۱۴) اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(1)=5$ و $f^{-1}(9)=3$، آنگاه ضابطه‌ی f و f^{-1} را بدست آورید.

۱۵) اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، مقدار $(2f-g)(3)$ را بدست آورید.

۱۶) اگر $f=\{(1,-4),(2,7),(3,5),(4,9)\}$ و $g=\{(-1,3),(0,2),(2,4),(3,1)\}$ باشند، آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ و دامنه‌ی هر یک را مشخص کنید.

۱۷) در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق در تابع داده شده را بیابید.

الف

$f(x)=\frac{x-2}{x+5}$

$g(x)=x^2+3x-10$

ب

$g=\{(-1,2),(0,3),(2,4),(3,0)\}$

$f=\{(2,5),(3,4),(0,-2)\}$

۱۸) تابع $y=\sqrt{x+4}-1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید.

۱۹) اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\le 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x & x\ge -2 \\ x-1 & x<-2\end{cases}$ باشد، حاصل $(f+2g)(x)$ به ازای $x=f(0)$ چقدر است؟

@riazi_sh

فصل چهارم

واحدهای اندازه‌گیری:

1- رادیان: 1 رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

اگر L طول کمان روبه‌رو زاویه، r شعاع دایره و α زاویه برحسب رادیان باشد، داریم: $\alpha = \frac{L}{r}$

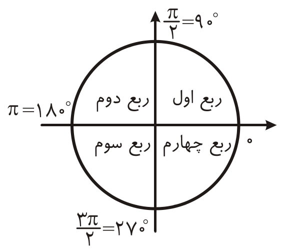
2- تبدیل درجه و رادیان به یک‌دیگر: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

مثال: در دایره‌ای به شعاع 3، توسط زاویه α، کمانی به طول 7 متر ایجاد می‌شود، با فرض $\pi = 3$، اندازه α برحسب درجه کدام است؟

حل : $\alpha = \frac{L}{r} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{7}{3}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{7}{9} \times 180 = 140$

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی:

ربع / نسبت مثلثاتی	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-



مثال: علامت $\cos(\frac{7\pi}{9})$ را مشخص کنید.

حل : چون $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{9} < \pi$ قرار دارد (ناحیه دوم)، پس کسینوس منفی است.

روابط مهم:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\tan\alpha . \cot\alpha = 1$

3) $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$

4) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی قرینه:

1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2) $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

4) $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی مکمل و متمم:

1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

3) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

4) $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

5) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

6) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

7) $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

8) $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

@riazi_sh

9) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ 10) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

11) $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ 12) $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

13) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ 14) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

15) $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$ 16) $\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

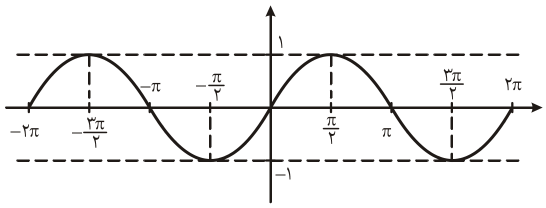
نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان:

هرگاه زاویه به صورت $2k\pi\pm\alpha$ بود، می‌توان از $2k\pi$ صرف‌نظر کرد.

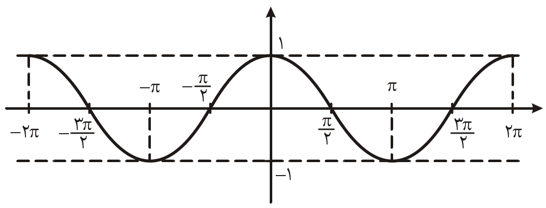
مثال: $\sin(2\cancel{k}\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$

توابع مثلثاتی:

رسم تابع سینوس: $y=\sin x\Rightarrow$

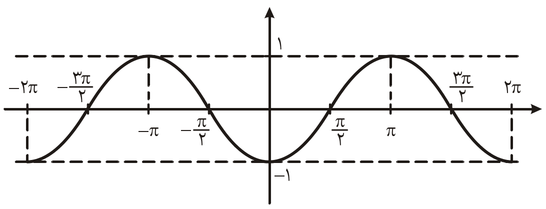


رسم تابع کسینوس: $y=\cos x\Rightarrow$



مثال: نمودار تابع $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.

حل: چون x منهای $\frac{\pi}{2}$ شده، پس به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست می‌رویم.



توابع $y=a\sin(bx+c)$ **و** $y=a\cos(bx+c)$

دوره تناوب این توابع $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. بیش‌ترین مقدار تابع برابر $|a|$ و کم‌ترین مقدار تابع برابر $-|a|$ می‌باشد.

۱) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

۲) درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

۳) هریک از زاویه‌های -۱۲°، ۳۶°، ۷۲°، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید.

۴) اگر $\tan\theta = -۲$ و $\sin\theta < ۰$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بدست آورید.

۵) اگر $\tan\theta = ۴$ باشد، مقدار $\frac{۳\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ را بدست آورید.

۶) اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta) - \cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta) - \sin(۳\pi+\theta)}$ را بدست آورید.

۷) حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ$

ب) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ)$

پ) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳}) - \cos(\frac{۲۳\pi}{۴})$

۸) در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید:

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{۱۸}) = \cot(\frac{۲\pi}{۹} + x)$

@riazi_sh

۹ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

الف

$y = \sin x \quad , \quad y = \cos(x - \frac{\pi}{۲})$

ب

$y = \cos x \quad , \quad y = \cos(۲\pi - x)$

۱۰ بُرد هر یک از توابع زیر را در دامنه‌ی داده شده بدست آورید.

الف) $y = ۳\sin x - ۱ \qquad [۰, ۲\pi]$

ب) $f(x) = ۲ - ۴\cos x \qquad [۰, ۲\pi]$

پ) $h(x) = ۳\sin^۲ x - ۲ \qquad [۰, ۲\pi]$

ت) $y = ۱ - ۲\cos(x - \frac{\pi}{۳}) \qquad [۰, ۲\pi]$

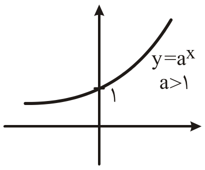
فصل پنجم

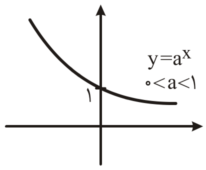
1 - توان‌های حقیقی: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف 1 و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

1) $a^0=1$ 2) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ 3) $a^x.a^y=a^{x+y}$

4) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ 5) $(ab)^x=a^x.b^x$ 6) $(a^x)^y=a^{x.y}$

تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $f(x)=a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی نام دارد.





نکته: اگر $a>1$ باشد، تابع صعودی و اگر $0<a<1$ باشد، تابع نزولی است.

نکته: نمودار تابع، محور y ها را در نقطه $(0,1)$ قطع می‌کند و با محور x ها برخوردی ندارد.

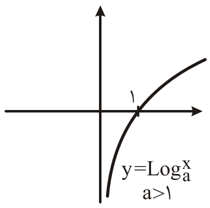
2 - نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ $(a>0$ و $a\neq 1)$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

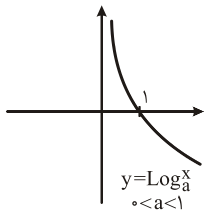
معادلات نمایی: هر معادله به صورت $a^u=b^7$ $(a,b\neq 1$ و $a,b>0)$ یک معادله نمایی است. اگر بتوان پایه دو طرف را یکسان کرد، آن‌گاه توان‌ها برابر هم قرار می‌گیرند.

مثال: معادله $9^{3x+1}=27^{-2x+1}$ را حل کنید.

حل :
$$\begin{cases}9^{3x+1}=(3^2)^{3x+1}=3^{6x+2}\\ 27^{-2x+1}=(3^3)^{-2x+1}=3^{-6x+3}\end{cases}\Rightarrow 3^{6x+2}=3^{-6x+3}\Rightarrow 6x+2=-6x+3\Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x)=a^x$ را به صورت $f^{-1}(x)=Log_a^x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم.





نکته: نمودار تابع، محور x ها را در نقطه $(1,0)$ قطع می‌کند و با محور y ها برخوردی ندارد.

دامنه توابع لگاریتمی: دامنه تابع $f(x)=Log_{h(x)}^{g(x)}$ از حل نامعادلات روبه‌رو به دست می‌آید:
$$\begin{cases}1)\ g(x)>0\\ 2)\ h(x)>0\\ 3)\ h(x)\neq 1\end{cases}$$

مثال: دامنه تابع $f(x)=Log_{(x+1)}^{(x-2)}$ را به دست آورید.

حل :
$$\begin{cases}1)\ x-2>0\Rightarrow x>2\\ 2)\ x+1>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow x>2\Rightarrow D_f=(2,+\infty)\\ 3)\ x+1\neq 1\Rightarrow x\neq 0\end{cases}$$

ویژگی‌های لگاریتمی:

1) $Log_a^1=0$ 2) $Log_a^a=1$ 3) $Log_a^x=b\Rightarrow a^b=x$

4) $Log_a^{x^m}=m\,Log_a^x$ 5) $Log_{a^n}^x=\dfrac{1}{n}Log_a^x$ 6) $Log_a^x+Log_a^y=Log_a^{x.y}$

7) $Log_a^x-Log_a^y=Log_a^{\frac{x}{y}}$

مثال: اگر $Log^2=0/3$ و $Log^3=0/48$، مقدار تقریبی $Log0/75$ کدام است؟

حل :
$$0/75=\frac{3}{4}\Rightarrow Log^{0/75}=Log^{\frac{3}{4}}=Log^3-Log^4=Log^3-Log^{2^2}=0/48-2\times 0/3=-0/12$$

@riazi_sh

معادلات لگاریتمی: اگر تساوی $Log_a^x = Log_a^y$ برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $x = y$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$Log_2^{(x+1)} + Log_2^{(x+4)} = 2$$

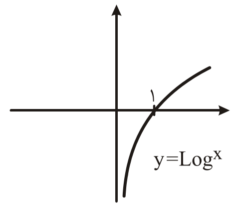
حل : $\Rightarrow Log_2^{(x+1)(x+4)} = 2 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 2^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \times \end{cases}$

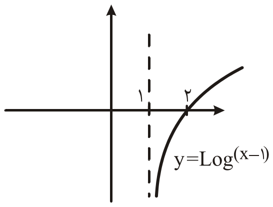
مقدار $x = -5$ قابل قبول نیست زیرا عبارت جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

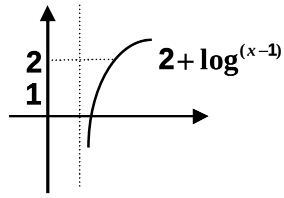
مثال: نمودار تابع $y = 2 + Log^{(x-1)}$ را رسم کنید.

نکته: 1- مقادیر x منهای یک شدند، پس ما یک واحد به سمت راست می‌رویم.

2- تابع لگاریتمی با عدد 2 جمع شده است، پس 2 واحد به سمت بالا می‌رویم.







کاربرد تابع لگاریتمی: مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزادشده زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M و انرژی آزادشده برابر E در واحد (Erg) باشد داریم:

$$Log^E = 11/8 + 1/5M$$

۱ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو تابع $y = ۴^x$ و $y = (\frac{۱}{۲})^{۲x-۳}$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

۲ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف

$۲^{۳n-۲} = \frac{۱}{۳۲^۲}$

ب

$۹^{۳y-۳} = ۲۷^{y+۱}$

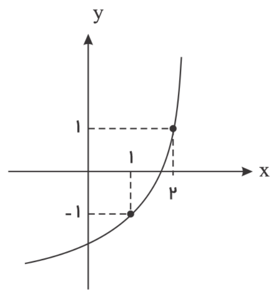
پ

$۴^{۳x+۲} = \frac{۱}{۶۴^۳}$

ت

$(\frac{۳}{۵})^{x+۱} = \frac{۲۵}{۹}$

۳ نمودارتابع زیر دارای ضابطهٔ $f(x) = a \times ۳^x + b$ است، ضابطهٔ $f(x)$ را بدست آورید.



۴ مقدار x را بدست آورید.

الف) $\log_{۲} ۶۴ = ۲x - ۴$

ب) $\log_{۱۶} x = \frac{۵}{۴}$

پ) $\log_{۳}(۴x + ۳) = ۳$

ت) $\log_{x}(x^{۲} + ۲x - ۸) = ۲$

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{۴}(x - a)$ از نقطهٔ $(۰, ۱)$ عبور می‌کند. دامنهٔ این تابع را بدست آورید.

۶ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log ۷ \sqrt[۵]{۴۹}$

ب) $\log_{۳} ۲۷^{\frac{۱}{۲}}$

پ) $-\log_{۵} ۱۲۵$

ت) $۳\log_{۱۰} \sqrt{۱۰۰۰}$

۷ اگر $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴۸$ باشد، مقادیر تقریبی اعداد زیر را بدست آورید.

الف

$\log ۱۲$

ب

$\log \sqrt{۵}$

پ

$\log \frac{۲۵}{۱۸}$

۸ اگر $\log_{۲}(۵x + ۱) + \log_{۱} x = ۲$ باشد، مقدار $\frac{۴}{x}$ را بدست آورید.

۹ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$\log_{۳}(p^{۲} - ۲) = \log_{۳} p$

ب

$\log_{۵}(x + ۱) + \log_{۵}(x - ۱) = ۱$

۱۰ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$\log_{۲}(۲x + ۱) = ۳$

ب

$\log_{۲}(x + ۱) + \log_{۲}(x + ۴) = ۲$

پ

$\log(۲x) - \log(x - ۳) = ۱$

ت

$۲\log_{۴}(x - ۱) = ۳$

@riazi_sh

فصل ششم

مفهوم حد راست و چپ:

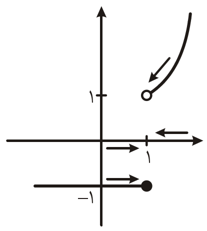
1- حد راست: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (x_0,b) تعریف شده باشد، حد راست f در x_0 برابر L است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

2- حد چپ: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,x_0) تعریف شده باشد، حد چپ f در x_0 برابر L است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

3- حد تابع: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) تعریف شده باشد. هر تابع f در x_0 برابر عدد L است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد. به شرط آن‌که x از دو طرف به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ اگر و تنها اگر } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \text{ و } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=L}$$

مثال: نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. حد در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.



حل: 1- حد راست: با توجه به نمودار وقتی از سمت راست به نقطه یک نزدیک می‌شویم، مقدار تابع f به یک نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

2- حد چپ: با توجه به نمودار وقتی از سمت چپ به نقطه یک نزدیک می‌شویم، مقدار تابع f به -1 نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$$

3- مقدار در خود نقطه $x=1$ برابر -1 است.

به دلیل این‌که مقدار حد چپ و راست در نقطه $x=1$ برابر نیست، پس تابع f در نقطه $x=1$، حد ندارد.

مثال: اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ باشد، آیا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود است؟

حل:
$$f(x)=\frac{|x|}{x}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1 & x\ge 0\\[2mm] \dfrac{-x}{x}=-1 & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{cases}$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.

محاسبه حد تابع:

1- حد تابع ثابت: اگر $f(x)=k$ باشد، در هر نقطه دلخواه a، حد تابع $f(x)$ برابر k است.

مثال: اگر $f(x)=3$ باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)=3$

2- حد تابع همانی: اگر $f(x)=x$ باشد، در هر نقطه دلخواه a، حد تابع برابر a است.

مثال: $\lim\limits_{x\to 5} x=5$ و $\lim\limits_{x\to 2} x=2$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$، آن‌گاه:

@riazi_sh

1) حد مجموع $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+m$

2) حد تفاضل $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-m$

3) حد حاصل‌ضرب $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=L.m$

4) حد تقسیم $\Rightarrow Lim(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\dfrac{L}{m}\Rightarrow m\neq 0\Rightarrow$ مخرج باید مخالف صفر باشد.

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه:

1) $\lim\limits_{x\to a}(Cf(x))=C\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=C\times L$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^n=L^n$

نکته: اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ برابر با $\dfrac{0}{0}$ شود، ابتدا باید $f(x)$ و $g(x)$ را بر $x-a$ ساده کنیم و سپس با استفاده از قانون تقسیم، حدها را بررسی کنیم.

مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}=\frac{(-1)^2+3(-1)+2}{(-1)^2+5(-1)+4}=\frac{0}{0}$$

حل :

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+4)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x+4}=\frac{-1+2}{-1+4}=\frac{1}{3}$$

حد توابع جزء صحیح:

در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح ابتدا با توجه به تعریف جزء صحیح، به جای آن، عدد ثابتی قرار می‌دهیم، سپس با توجه به قضایای حد، حدگیری را انجام می‌دهیم.

مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1^-}([x]+3x)=\lim_{x\to 1^-}[1^-]+3x=\lim_{x\to 1^-}(0+3x)=3(1)=3$$

پیوستگی:

تابع f را در نقطه $C\in R$ پیوسته می‌گوییم، هرگاه
$\begin{cases}\text{(1) تابع در } x=C \text{ حد داشته باشد.}\\ \text{(2) حد تابع در } x=c \text{ با مقدار تابع در } C \text{ برابر باشد.}\end{cases}$

پیوستگی راست: هرگاه $\lim\limits_{x\to C^+} f(x)=f(C)$ ، در این صورت می‌گوییم تابع f ، در $x=C$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: هرگاه $\lim\limits_{x\to C^-} f(x)=f(C)$ ، در این صورت می‌گوییم تابع f ، در $x=C$ پیوستگی چپ دارد.

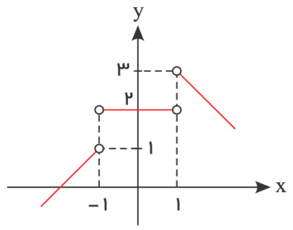
پیوستگی روی بازه:

1) تابع f روی بازه (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

2) تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است، هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a، پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

@riazi_sh

۱) با توجه به شکل زیر مقدار $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ را بدست آورید.

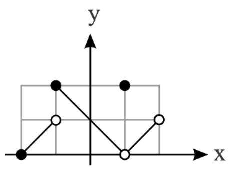


۲) اگر $f(x)=\begin{cases} ax-1 , & x<1 \\ x^2+2a , & x\geq 1 \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^+} (x) = -1$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۳) اگر $f(x)=\begin{cases} 2x , & x\geq 1 \\ 3-x^2 , & x<1 \end{cases}$ باشد، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را بدست آورید.

۴) تابع $f(x)=\begin{cases} (a+2)x-3 , & x>2 \\ -x^2+1 , & x\leq 2 \end{cases}$ مفروض است، اگر تابع f در $x=2$ دارای حد باشد، مقدار a را بدست آورید.

۵) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

ب) $f(1)=2$

پ) $f(2)=1$

ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

چ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد.

۶) آیا حد تابع زیر در $x=2$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

۷) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

@riazi_sh

۸ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۷}(-۳)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۲x-۷)$ پ) $\lim\limits_{x\to -۱}(۳x^۲-۴x+۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$ ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲x^۲-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۳+۸}{x+۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲}[x]$ ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x}$ خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۷}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ ذ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}$ ر) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x-۲}{[x]+۱}$ ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x$ س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{x}{[x]}$ ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}$ ض) $\lim\limits_{x\to ۰}(x+[x])$

۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{۲x-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۴x^۲}{۲x^۲-x^۳}$

پ) $\lim\limits_{x\to (-۱)}\dfrac{۳x^۲+۵x+۲}{۲x^۲+x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۳-۲۷}{x^۲-۲x-۳}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۳x^۳+۴x-۳x^۲-۴}{x^۲+x-۲}$

۱۰ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۳}f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to ۳}g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۱۱ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱\ , & x<۱ \\ ۲\ , & x=۱ \\ -x+۳\ , & x>۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ چه نوع پیوستگی دارد؟

۱۲ در تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۳\ , & x>۱ \\ ۵ & x=۱ \\ -۲x+b\ , & x<۱ \end{cases}$، مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x=۱$ پیوسته باشد.

@riazi_sh

۱۳) با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۱۴) توابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=۳$ بررسی کنید.

۱۵) با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سوالات پاسخ دهید.

$$f(x)=۲x+۱\ ,\quad g(x)=۲x+۱\quad x\neq ۲\quad ,\ h(x)=\begin{cases}۲+x & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:
$$f(۲)=\qquad ,\qquad g(۲)=\qquad ,\qquad h(۲)=$$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید:
$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\qquad \lim_{x\to ۲} g(x)=\qquad \lim_{x\to ۲} h(x)=$$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۱۶) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۲ax+b\ , & x>۲\\ ۵\ , & x=۲\\ x^۲+bx-a, & x<۲\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، a و b را بدست آورید.

@riazi_sh

فصل هفتم

احتمال شرطی:

منظور از احتمال A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن‌که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{و} \quad P(B)\neq 0$$

پیشامد مستقل: هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد، آن‌گاه پیشامدهای A و B مستقل از یک‌دیگرند.

مستقل بودن A از B معادل است با این‌که $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

مثال: احتمال این‌که علی در درس ریاضی و فیزیک قبول شود، به ترتیب 0/7 و 0/8 است. اگر احتمال قبولی علی در درس ریاضی به شرط آن‌که در درس فیزیک قبول شود برابر 0/75 باشد، احتمال آن‌که علی حداقل در یکی از این دو درس قبول شود را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} \text{درس ریاضی} = A \Rightarrow P(A)=0/7 \\ \text{درس فیزیک} = B \Rightarrow P(B)=0/8 \end{cases} \Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{0/8}=0/75$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0/8\times 0/75=0/6$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7+0/8-0/6=0/9$$

آمار توصیفی:

میانگین: برابر است با مجموع همه داده‌ها که بر تعداد کل تقسیم می‌شود. $X=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{N}$

میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری که تعداد داده‌های قبل و بعد آن با هم برابر است را میانه می‌نامیم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

نکته : اگر همه داده‌ها را با عدد ثابت a جمع کنیم، میانگین و میانه هم با عدد a جمع می‌شوند.

نکته : اگر همه داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم، میانگین و میانه هم در عدد a ضرب می‌شوند.

نکته : لزومی ندارد میانه عضوی از داده‌ها باشد.

نکته : اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده‌ی وسط برابر میانه است.

شاخص‌های پراکندگی: 1- دامنه تغییرات؛ 2- واریانس؛ 3- انحراف معیار؛ 4- ضریب تغییرات

1 - **دامنه تغییرات:** عبارت است از اختلاف کوچک‌ترین داده از بزرگ‌ترین داده و آن را با R نمایش می‌دهند.

2 - **واریانس:** میانگین مجذور انحرافات از میانگین داده‌ها: $\sigma^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{N}$

3 - **انحراف معیار:** جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن را با σ نمایش می‌دهند.

4 - **ضریب تغییرات:** برابر است با نسبت انحراف معیار به میانگین و آن را با CV نشان می‌دهند. $CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}$

چارک‌ها:

چارک‌ها (چارک اول و دوم و سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب‌شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نشان می‌دهند.

مثال: برای داده‌های زیر، میانه، میانگین، واریانس و ضریب تغییرات را محاسبه کنید.

2,4,4,4,4,6

@riazi_sh

حل :

1) $Q_2 \Rightarrow$ داده‌ای است که وسط قرار می‌گیرد. $\Rightarrow Q_2 = \frac{4+4}{2} = 4$

2) $\bar{X} = \frac{2+4+4+4+4+6}{6} = \frac{24}{6} = 4$

3) $\sigma^2 = \frac{(2-4)^2 + 4\times(4-4)^2 + (6-4)^2}{6} = \frac{4+4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

4) $\sigma = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5) $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

۱) اگر $P(A) = \frac{۱}{۲}$ و $P(B) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A|B) = \frac{۱}{۴}$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۲) یک تاس را پرتاب کرده‌ایم و عدد ظاهر شده مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که عدد ظاهر شده زوج باشد، چقدر است؟

۳) در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم که فرزند اوّل آن‌ها دختر است. احتمال این‌که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد را بدست آورید.

۴) احتمال وقوع یک بیماری در یک جامعه آماری برابر ۱۲% و احتمال این‌که فردی این بیماری را بگیرد و درمان شود برابر ۱۰ درصد است. اگر فردی این بیماری را بگیرد، احتمال درمان او چقدر است؟

۵) دو تاس با هم پرتاپ شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرطی که بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به‌دست آورید.

۶) یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۷) فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل‌اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

@riazi_sh

۸) احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰٫۶۲۵ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۹) احمد به احتمال ۰٫۷ در تیم بسکتبال مدرسه‌شان و به احتمال ۰٫۸ در تیم ملّی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۱۰) احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{۱}{۴}$ است. چقدر احتمال دارد که فرزند اوّل و دوّم این خانواده هم‌جنس باشند؟

۱۱) اگر ۷۵٪ افراد جامعه‌ای، دارای چشم مشکی و ۴۰٪ گروه خونی نوع A باشند و یک فرد بطور تصادفی از بین آنها انتخاب شود. احتمال این که این فرد دارای چشم مشکی یا گروه خونی A باشد چقدر است؟

۱۲) اگر $P(A) = ۰٫۶$ و $P(B) = ۰٫۳$ و A و B مستقل باشند؛ $P(AUB)$ را بدست آورید.

۱۳) احتمال این‌که فرهاد در کنکور قبول شود ۰٫۷ و احتمال این‌که بابک در کنکور قبول شود ۰٫۸ است. مطلوبست احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها در کنکور قبول شود.

۱۴) اگر میانگین داده‌های $x_۴ + ۶$، $x_۳ - ۴$، $x_۲ - ۳$، $x_۱ + ۹$ برابر ۱۰ باشد، میانگین داده‌های $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ را بیابید.

۱۵) اگر میانگین داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_N$ برابر ۸ باشد میانگین داده‌های $۳x_۱ + ۴, ۳x_۲ + ۴, \ldots, ۳x_N + ۴$ را محاسبه کنید.

۱۶) اگر میانگین ۲۰ داده آماری ۳۵ باشد و داده‌های ۴۶, ۴۹, ۴۱, ۵۲ را از مجموعه داده‌ها حذف کنیم، میانگین جدید چقدر است؟

۱۷) میانه داده‌های آماری ۱۹, ۲۷, ۲۵, ۲۰, ۱۲, ۲۳, ۱۷, ۱۴, ۱۵, ۲۶, ۳۰ را بدست آورید.

@riazi_sh

۱۸) واریانس داده‌های $۲۰, ۱۵, ۲۴, ۲۲, ۱۹, ۲۶$ را بدست آورید.

۱۹) اگر واریانس داده‌های $x_۱, x_۲, \dots, x_N$ برابر ۴ باشد، واریانس داده‌های $-۳x_۱ + ۲, -۳x_۲ + ۲, \dots, -۳x_N + ۲$ را محاسبه کنید.

۲۰) کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به‌ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به‌ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

۲۱) در ۶۰ دادهٔ آماری میانگین ۳ و انحراف معیار ۱٫۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید را بدست آورید.

۲۲) برای داده‌های $۲۱, ۱۵, ۱۴, ۲۸, ۳۱, ۱۲, ۲۰, ۲۴, ۳۰, ۱۷, ۱۹, ۸$ میانه، چارک اوّل و چارک سوّم را بیابید.

@riazi_sh