سؤالات موضوعی نهایی

((هندسه ۳))

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

آخرین نسخه: شهریور ۱۴۰۲

((فصل اوّل : ماتریس و کاربردها))

❋❋❋

درس۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

(❋) مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، را ماتریس .... می نامند.

۲	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i<j \\ -i+j & i\geq j \end{cases}$ می باشد. مجموع درایه های ستون دوّم ماتریس A را به دست آورید.

۳	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\dfrac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایه های واقع در سطر سوّم و ستون دوّم ماتریس A برابر است با : ....

۴	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.

۵	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس .... می نامیم.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آنگاه آن را یک ماتریس ..... می نامیم.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس اسکالر نامیده می شود.

۸	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۸ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ...... است.

۹	دی ۱۳۹۹	۰/۷۵ نمره

۹ : اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ ۲ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد، درایه های $a_{۳۳}$ و $a_{۳۱}$ و $a_{۱۲}$ را به دست آورید.

۱۰	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

ماتریس مربعی که همه‌ی درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند.

۱۱	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ...... نامیده می شود.

(❋) ماتریس های مساوی

۱	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل $x+y+z$ را بیابید.

۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۲ : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند. مقدار $x+y+z$ را بیابید.

۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۰	۳

۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این حاصل $x+۲y+۳z$ را به دست آورید.

(❁) اعمال روی ماتریس ها

۰/۲۵ نمره	دی ۱۳۹۷	۱

۱ : جای خالی را با یک کلمه‌ی مناسب پرکنید.

حاصل ضرب ماتریس های خاصیت جابجایی ....

۱ نمره	دی ۱۳۹۷	۲

۲ : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه های سطر دوّم $A^۳$ برابر۵ می باشد.

ب: اگر $A^۲=A$ باشد. در این صورت داریم : $(A+I)^۲=I+۳A$

۱/۲۵ نمره	دی ۱۳۹۷	۳

۳ : اگر ماتریس A به صورت زیر تعریف شده باشد. ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i.j & i>j \\ i^۲ & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases} \quad , \quad A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$$

۱/۵ نمره	دی ۱۳۹۷	۴

۴ : اگر ضرب ماتریس های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد.

حاصل $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}$ را بیابید.

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۳۹۸	۵

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم، $AB=AC$ آنگاه لزوماً $B=C$ است.

۶	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۶ : در معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳x & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ مقدار x را بیابید.

۷	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۷ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۷}$ را به دست آورید.

۸	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : ماتریس های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را

چنان بیابید که داشته باشیم : $A^{۲} - B = \overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

۹	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$

ماتریس قطری باشد.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۱ : معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$ را حل کنید.

۱۲	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

حاصل ضرب ماتریس ها، خاصیت جابجایی ....

۱۳	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم، $AB = AC$ ، آنگاه لزوماً $B = C$ است.

۱ نمره	دی ۱۳۹۹	۱۴

۱۴ : مقادیر x و y را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$[x \quad ۲]\times\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=[۴ \quad y-۲]$$

۱ نمره	دی ۱۳۹۹	۱۵

۱۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۱۶

۱۶ : درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

اگر ماتریس A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی و مخالف صفر باشد و $rA=rB$ ، آنگاه داریم : $A=B$

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۱۷

۱۷ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

۰/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۱۸

۱۸ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند، آنگاه عبارت $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ همواره برقرار است.

۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۱۹

۱۹ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد. مقادیر b و a را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

❋❋❋

درس۲ : وارون ماتریس و دترمینان

(*) دترمینان

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۷۵ نمره

۱ : اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A|=-2$. حاصل $||A|.A|$ را بیابید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱نمره

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^3|$ را محاسبه کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب ....

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A|=2$. حاصل $|\frac{1}{|A|}A|$ را بیابید.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با ....

۶	شهریور ۱۳۹۸	۲ نمره

۶ : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد.

الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با ....

۸	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند. دترمینان ماتریس BA را بدست آورید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۲$ باشد،آنگاه $|۲A|=۱۶$ است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۰ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد،

حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

۱۱	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۷۵ نمره

۱۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ -۴ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد، آنگاه $|\frac{۱}{۲}A|$ برابر ...... است.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|B^۲|+|A|$ را بیابید.

۱۴	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۴ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه‌ی $A^۲ = mA + ۲I_۲$ برقرار باشد.

($I_۲$ ماتریس همانی است.)

۱۵	دی ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|A+B|+|۲I_۳|=$

۱۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۶ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} f & ۰ & ۲ \\ ۰ & a & ۰ \\ b & c & e \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر .... است.

۱۷	شهریور ۱۴۰۰	۱/۷۵ نمره

۱۷ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف : آیا جمع دو ماتریس B و A تعریف می شود؟ چرا؟

ب : حاصل $|A\times B|$ را به دست آورید.

۱۸	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۸ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند، آنگاه $|AB|=|A||B|$

۱۹	دی ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۹ : اگر $A=[۲i-۳j]_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳}=\begin{cases} -۱ & i\neq j \\ ۰ & i=j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.

۲۰	دی ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

۲۰ : اگر A ماتریس ۳×۳ و $|A|=۴$ باشد. دترمینان ماتریس $|A|\times A$ را به دست آورید.

(❋) وارون ماتریس

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد، آن است که دترمینان ماتریس A .... باشد.

۲	شهریور ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۲ : مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۳	خرداد۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.

۴	خرداد۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۴ : الف : اگر $A=\begin{bmatrix} \|A\| & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\|A\|$ را بیابید.

ب : ماتریس وارون A را حساب کنید.

۵	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۵ : اگر $۲A=\begin{bmatrix} \|A\| & -۴ \\ ۱ & \|A\| \end{bmatrix}$ باشد، در این حاصل $\|A^{-۱}\|$ را بیابید.

۶	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۶ : ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

(❋) حل دستگاه معادلات

۱	دی۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : دستگاه زیر به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می باشد.

$$\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۲ : مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۳ \\ ۴x+(m+۴)y=۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر داشته باشیم $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۴ \\ x-y=۳ \end{cases}$$

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A|\neq ۰$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۷	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۷ : جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$$

۸	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۸ : در تساوی $\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۹ : الف : حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx+۳y=۱ \\ ۲x-y=۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصر بفرد باشد.

ب : جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۰ : دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف : در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۲ : الف : به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ mx+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد <u>جواب</u> است؟

ب : دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۶y=-۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

۱۳	دی ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۳ : دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$$

۱۴	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۴ : جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$$

۱۵	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۵ : مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۱۶	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۱۶ : اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ۲x - y = ۴ \\ -۴x + ۳y = ۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم. از تساوی $AX = B$ ماتریس X را به دست آورید.

❋❋❋

((فصل دوّم : آشنایی با مقاطع مخروطی))

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

صفحه‌ای با مولد سطح مخروطی دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولّد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

۳	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی l عمود باشد و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی L عمود باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک ..... خواهد بود.

۵	دی۹۹	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک .... خواهد بود.

۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۶ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند. در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک .... است.

۷	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۷ : اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

۸	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۸ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

(❋) مکان هندسی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d' و d به یک فاصله اند. نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطه‌ی ثابت، یک مقدار ثابت باشد، یک .... است.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. (پیرامون وجود جواب بحث کنید.)

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه‌ی به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. (در مورد تعداد نقاط در حالت های مختلف بحث کنید.)

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی۳ سانتی باشد. (پیرامون جواب مسئله بحث کنید.)

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج اند، دایره ی $C'(O,2r)$ است.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۸ : نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند، نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد.(بحث کنید.)

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.

۱۰	شهریور ۱۳۹۹	۰/۵ نمره

۱۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف : مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

ب : هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

۱۱	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۱۲	دی ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۲ : نقطه‌ی A و خط d در صفحه‌ی مفروض اند. نقطه ای را بیابید که از A به فاصله‌ی۲ سانتی متر و از خط d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. در مورد روش حل بحث کنید.

۱۳	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند، یک نیم خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

۱۴	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا است که همه‌ی آنها یک ویژگی ...... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

۱۵	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.

۲	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۲ : حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

۳	دی ۱۳۹۷	۱/۷۵ نمره

۳ : دایره های $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

۵	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۵ : از نقطه‌ی $A(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دایره های $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ و $x^2+y^2=1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۷	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(-2,3)$ مرکز آن و $M(1,-1)$ یک نقطه از آن باشد.

۸	شهریور۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : وضعیت خط $x+y=2$ و دایره‌ی $x^2+y^2=2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹	دی۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

معادله‌ی ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2<4c$ باشد.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,-2)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2+2x-4y=4$ مماس خارج باشد.

۱۱	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱۱ : وضعیت خط $3x+y=0$ را نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ مشخص کنید.

۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۲ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x+y=2$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : وضعیت نقطه‌ی $A(1,-2)$ نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-2x+2y=0$ را تعیین کنید.

۱۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

۱۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۱۵ : وضعیت دو دایره‌ی $x^2+y^2-2x=4$ و $x^2+y^2=4$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۶	شهریور۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

رابطه‌ی $x^2+y^2-2x-4y+10=0$ معادله‌ی یک دایره است.

۱۷	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(3,1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $4x+3y+5=0$ مماس باشد.

۱۸	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۸ : وضعیت خط $x-y-1=0$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۹	شهریور۱۳۹۹	۲ نمره

۱۹ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله‌ی

$$x^2+y^2-8x+4y+16=0$$

مماس داخل باشد.

۲۰	دی۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۲۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $(-2,3)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد.

۲۱	دی۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

۲۲	دی۱۳۹۹	۲ نمره

۲۲ : وضعیت دو دایره‌ی $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۲۳	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x+۴y=-۵$ مماس باشد.

۲۴	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۴ : وضعیت دایره‌ی $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ با دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

۲۵	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۵ : نقطه‌ی $(۳,-۲)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲x=۰$ قرار دارد.

۲۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۶ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۲۷	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۷ : در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

۲۸	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۸ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۳)$ بوده و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد.

۲۹	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۹ : در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم، معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

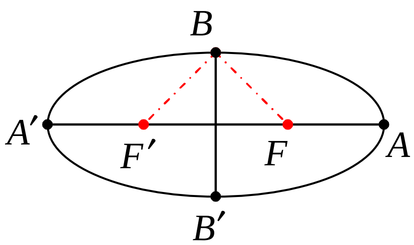
❋❋❋

درس ۳ : بیضی و سهمی

(❋) بیضی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : در بیضی شکل مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید.



۲	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

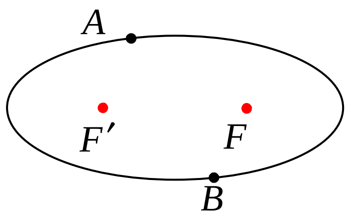
۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک .... می شود.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۳ : اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی۱۶ باشد. طول قطر بزرگ بیضی و فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

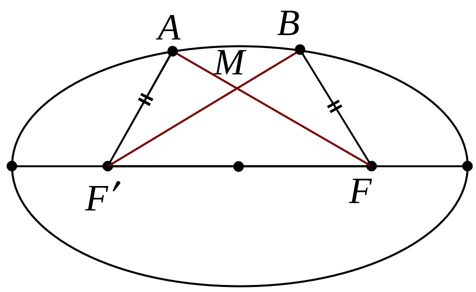


۴ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل، روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. اگر $AF' = BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی اند.

۵	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

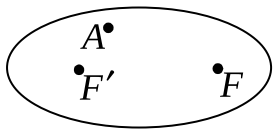
۵ : اگر $A(۲,۱۲)$ و $A'(۲,-۸)$ دو رأس بیضی(AA' قطر بزرگ بیضی) و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد. فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید.

۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره



۶ : دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. با توجه به شکل، اگر $AF' = BF$ باشد. نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است.

۷	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره



۷ : در شکل مقابل نقطه‌ی A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه‌ی A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.

۸	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

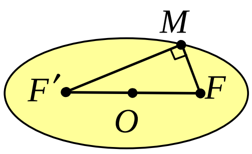
۹	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم الزاویه است. طول MF را بدست آورید. (F و F' کانون های بیضی هستند.)



۱۱	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر مجموع فواصل نقطه‌ی A از دو کانون بیضی بیشتر از طول بزرگ باشد، نقطه‌ی A در .... بیضی است.

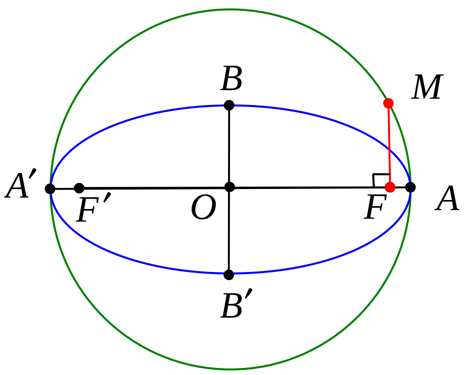
۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

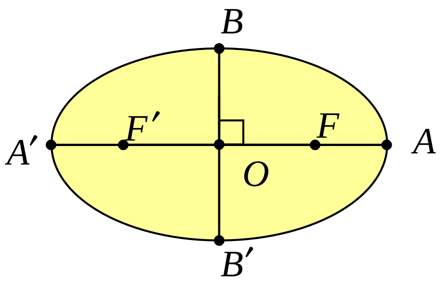
۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : قطر دایره‌ی C مانند شکل مقابل، قطر بزرگ بیضی است. و از کانون F عمودی بر قطر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید که اندازه‌ی MF برابر نصف اندازه‌ی قطر کوچک بیضی است.



۱۴	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۴ : در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟



۱۵	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۵ : اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله‌ی کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۱۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

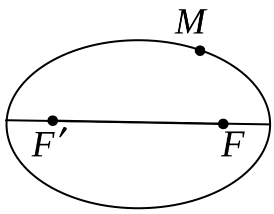
در صورتی که خروج از مرکز بیضی برابر ...... باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

۱۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۷ : در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ و اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر ۲۰ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۸ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



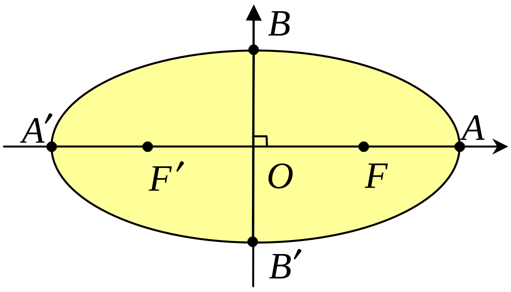
۱۹	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۹ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله‌ی کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است.

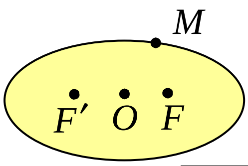
۲۰	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۰ : مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



۲۱	شهریور ۱۳۹۹	۱ نمره

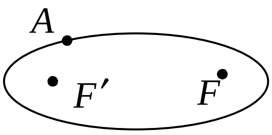
۲۱ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $MF' = NF'$



۲۲	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۲۲ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند.

اگر $AF' = BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازیند.



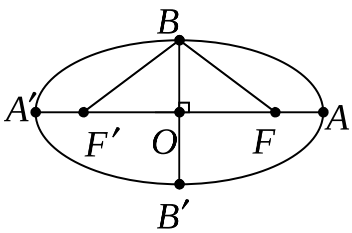
۲۳	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۳ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a} = ۰$ بیضی به .... تبدیل می شود.

۲۴	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۴ : در بیضی شکل مقابل، اگر $OA = a$ و $OB = b$ و $OF = c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲ = b^۲ + c^۲$

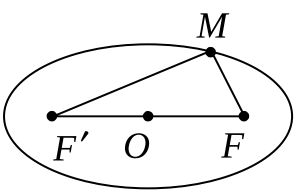


۲۵	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۵ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

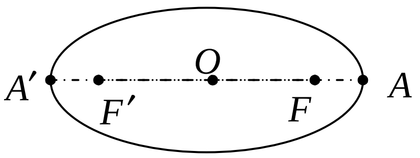
الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ب) طول MF را به دست آورید. (F' و F کانون های بیضی هستند و $MF < MF'$)



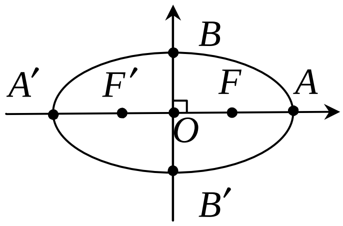
۲۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۲۶ : در بیضی روبرو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون های بیضی هستند. ثابت کنید $A'F' = AF$



۲۷	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۲۷ : در بیضی مقابل، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول قطر بزرگ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $F'BF$ را به دست آورید.



۲۸	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۸ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در حالتی که $\frac{c}{a} = 1$ بیضی به یک ..... تبدیل می شود.

۲۹	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.

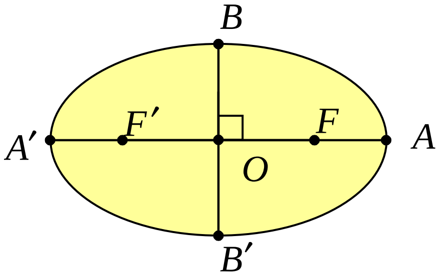
۳۰	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۳۰ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر مجموع فواصل نقطه‌ی A از کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ باشد، نقطه‌ی A در ..... بیضی است.

۳۱	دی ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۳۱ : اگر در یک بیضی، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟

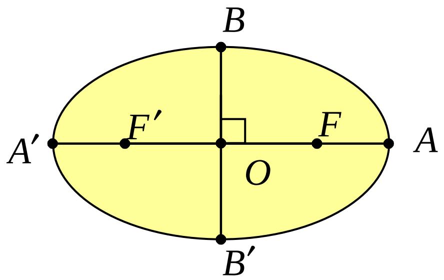


۳۲	دی ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۰ : در بیضی روبرو : $OA = OA' = a$

و $OB = OB' = b$ و $OF = OF' = c$

ثابت کنید : $b^۲ + c^۲ = a^۲$



(❋)سهمی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۲۵ نمره

۱ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $F(۱,-۲)$ کانون و $S(۱,۲)$ رأس آن باشد. سپس خط هادی آن را بنویسید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۲ نمره

۲ : سهمی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ مفروض است.

الف : مختصات رأس، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۳ : سهمی به معادله‌ی $y^۲ = ۴x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس سهمی، مختصات کانون سهمی و معادله‌ی خط هادی را بنویسید و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را .... می نامیم.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y = ۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف: معادله‌ی سهمی را بنویسید.

ب : مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۶ : سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم. معادله‌ی دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از .... خواهد گذشت.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۲/۵ نمره

۸ : الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی $x^۲-۴y+۸x=۰$ را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۹ : سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲ نمره

۱۰ : سهمی $x^۲=۲y-۴x$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی و محور های مختصات را بیابید.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیر واقع برآن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۲ : مختصات کانون، مختصات رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $y^۲-۶y+۱۶x+۲۵=۰$ را تعیین کنید.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۳ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۴,۶)$ رأس و $y=۳$ معادله‌ی خط هادی آن باشد.

۱۴	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

رأس سهمی به معادله‌ی $y^{۲}+۲x-۲y=۰$ ، نقطه‌ای به مختصات .... است.

۱۵	دی ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۵ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد. سپس خط هادی آن را بیابید.

۱۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

۱۷	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۷ : اگر نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف : معادله‌ی سهمی را به دست آورید. ب : مختصات کانون سهمی را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

۱۸ : در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه‌ی دایره ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد، مفروض است. فاصله‌ی کانونی این دیش را به دست آورید.

۱۹	شهریور ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۹ : سهمی به معادله‌ی $y^{۲}-۲y+۸x+۹=۰$ را در نظر بگیرید.

الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

۲۰	دی ۱۴۰۰	۲ نمره

۲۰ : سهمی $y^{۲}=۲x+۴y$ را در نظر بگیرید.

الف : مختصات رأس ، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب : نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

❋❋❋

((فصل سوّم : بردارها))

***

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $A(۲,-۳,۰)$ روی صفحه‌ی xoy قرار دارد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۲ : به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه‌ی xoy موازی باشد.

ب : معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ : در فضای $R^۳$ ، نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور طول ها و نقطه‌ی $B(-۴,۶,-۳)$ مفروض اند. مختصات نقطه‌ی وسط AB را بیابید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۵ نمره

۳ : نقاط $A(۲,۱,۳)$ و $B(-۱,۱,۳)$ در فضای $R^۳$ مفروض اند. معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

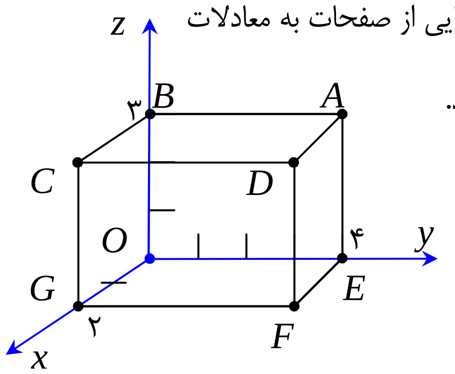
۴ : نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $R^۳$ مفروض اند.

الف: طول پاره خط AB را به دست آورید.

ب : معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت هایی از صفحات به معادلات $(x=0\ ,\ x=2)$ و $(y=0\ ,\ y=4)$ و $(z=0\ ,\ z=3)$ هستند.



الف : مختصات نقطه‌ی A را مشخص کنید.

ب : معادلات مربوط به یال AD و وجه $CDFG$ را بنویسید.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

نقطه‌ی $(0\ ,-1\ ,-2)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۷ : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی $y=0$ دارد؟ چرا؟

۸	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ در فضای R^2 چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار $x=0$ دارد؟

ب : اگر $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ باشد. اندازه‌ی بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ را به دست آورید.

۹	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۹ : نقاط $A(1,2,1)$ و $B(2,2,1)$ و $C=(3,2,-1)$ را در فضا در نظر می گیریم، کدام ها روی خط $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۱۰	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

در فضای R^3، نقطه‌ی $(-3,2,-5)$ در ناحیه‌ی(کنج) .... دستگاه مختصات قرار دارد.

۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۱۱ : به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $y=b$ معادله‌ی صفحه ای در فضای R^3 باشد که از نقطه‌ی $A=(2,-3,4)$ بگذرد، مقدار عددی b چقدر است؟

ب) معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

پ) در فضای $R^۳$، نقطه‌ی A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی yoz و نقطه‌ی $B(-۴,۶,-۳)$ مفروض اند، مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

۱۲	شهریور ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۲ : نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور x ها و نقطه‌ی B روی صفحه‌ی xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه بعدی مفروض اند.

الف : مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

ب : طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

پ : مختصات وسط پاره خط AB را به دست آورید.

۱۳	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

نقطه با مختصات $(-۴,۳,-۲)$ در ناحیه(کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

۱۴	دی ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۴ : الف : در فضای سه بعدی نقطه‌ی A روی محور x ها به طول ۲ و نقطه‌ی B در صفحه‌ی yox با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است. فاصله‌ی وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

ب : اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد، طول قطر اتاق که دو نقطه‌ی مقابل را به هم وصل می کنید را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{a}=۳\vec{i}-۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ و $r=۲$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۱,۲,۱)$ باشد. طول بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۳ : اگر $\vec{a}=۲\vec{j}-۳\vec{k}$ و $\vec{b}=(۰,۱,-۱)$ باشند. بردار $\vec{c}=۲\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ..... باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۵ : اگر $\vec{a}=(\sqrt{۸},۲,۴)$ و $\vec{b}=-۶\vec{j}+۸\vec{k}$ و $r=\frac{-۱}{۲}$

الف : طول بردار $r\vec{b}$ را مشخص کنید. ب : بردار $r\vec{a}+\vec{b}$ را بیابید.

۶	دی ۹۹	۱/۵ نمره

۶ : دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}(۰,۲,-۱)$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است. (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

۷	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۷ : بردار $\vec{a}=۲\vec{j}-\vec{k}$ در فضا سه بعدی بر کدام صفحه‌ی مختصات سه بعدی منطبق است؟ از بین گزینه های زیر انتخاب کنید.

xoy و yoz و xoz

❋❋❋

درس۲ : ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر.............. است.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید : $|\vec{a}.\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : مقدار m را طوری تعیین کنید که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(m,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ برابر ۴۵ درجه باشد.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$

در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۶	دی ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر بردار $\vec{a}=(a_۱, a_۲, a_۳)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{a}=\|\vec{a}\|^۲$

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم : $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ در این صورت $\theta=\frac{\pi}{۲}$ است. (θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.)

۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۸ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۰,-۱,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ را به دست آورید.

۹	دی ۹۹	۱ نمره

۹ : برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید: اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$ باشد، آنگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

۱۰	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر زاویه‌ی بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آنگاه ضرب داخلی آنها یک عدد حقیقی مثبت است.

۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۱ : اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند، به ترتیب با طول های ۱و۲و۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{c}(-۱,۱,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(-۱,-۳,۰)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۲ : بردار های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و سپس تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۵,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ بیابید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : ثابت کنید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : بردارهای $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(-۲,۰,۲)$ مفروض اند:

الف : تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۶	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۶ : بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۷ : بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

۸	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۸ : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۹	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۹ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را بیابید.

❋❋❋

(❋) ضرب خارجی دو بردار

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۲ : بردار های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و برداری عمود بر این دو بردار بنویسید.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : ثابت کنید،

دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۸$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در $R^۳$ داریم ، $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$ باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$ باشند، حاصل $\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})$ برابر است با ....

۸	خرداد۱۳۹۹	۲ نمره

۸ : دو بردار $\vec{a}=(۳,-۲,۱)$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام از فضای $R^۳$ واقع (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را حساب کنید.

پ : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید.

برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، نامساوی $|\vec{a}.\vec{b}|\geq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ برقرار است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۱ : بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۲	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار .... است.

۱۳	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، حاصل $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ است.

۱۴	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۴ : ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

۱۵	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۵ : برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول های واحد روی محور های مختصات در $R^۲$ ، داریم : $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

۱۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۶ : بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به طول های $||\vec{a}||=۳$ و $||\vec{b}||=۲۶$ و اندازه‌ی ضرب خارجی $||\vec{a}\times\vec{b}||=۷۲$ مفروض اند.

اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ کمتر از ۹۰ درجه باشد. مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.

۱۷	دی ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم، $\vec{a}.\vec{b}=||\vec{a}||\times||\vec{b}||$ در این صورت زاویه‌ی بین دو برادر بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .....

است.

۱۸	دی ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۸ : بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۹	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۱۹ : بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند، به طوری که $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ ، اگر زاویه‌ی بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ تولید می شود را به دست آورید؟

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,m,-۱۱)$ و $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۳ : اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد. مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : حجم متوازی السطوحی را محاسبه کنید که توسط بردار های $\vec{c}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۲)$ و $\vec{a}=(۲,۱,۰)$ تولید می شود.

۵	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۵ : سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض اند.

الف : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.

ب : حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲/۲۵ نمره

۷ : بردار های $\vec{a}=(-۴,۳,-۵)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ را در نظر بگیرید.

الف : تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

ج : مساحت مثلث پدید آمده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

۸	دی۹۹	۱ نمره

۸ : مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(3,2,1)$ و $\vec{b}=(2,0,1)$ بوجود می آید.

۹	خرداد ۱۴۰۰	۲ نمره

۹ : سه برابر $\vec{a}=(2,3,1)$ و $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}(2,1,-2)$ مروض اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $-2\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۱۰	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۰ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(0,m,-1)$ و $\vec{c}=(1,-2,3)$ در یک صفحه باشند.

❋❋❋

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل اوّل هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

(❋) مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

۱ : اسکالر

۲ :

$a_{۱۲}=۱-۲(۲)=-۳$ و $a_{۲۲}=-۲+۲=۰$ و $a_{۳۲}=-۳+۲=-۱$

$a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}=-۳+۰+(-۱)=-۴$

۳ : ۶

۴ : درست

۵ : اسکالر

۶ : سطری

۷ : نادرست

۸ : $m=۱$

۹ :

$a_{۳۳}=۲$ و $a_{۳۱}=۳+۱=۴$ و $a_{۱۲}=۱-۲=-۱$

۱۰ : قطری

۱۱ : ماتریس

(❋) ماتریس های مساوی

۱ :

$$A=B\rightarrow\begin{cases}۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}}y=۲\Rightarrow x+y+z=\frac{۳}{۲}+۲+(-۲)=\frac{۳}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

۲ :
$$\begin{cases}x-۱=y+۱\\ x-۲=۸\\ z+۱=۴\end{cases}\longrightarrow x=۱۰\ ,\ \ y=۸\ ,\ z=۳\rightarrow x+y+z=۲۱$$

۳ :

$$A=B\rightarrow\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}۲x=۳\\ ۲x+y=۵\rightarrow x=\frac{۳}{۲},\ y=۲\rightarrow x+۲y+۳z=-\frac{۱}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

(❋) اعمال روی ماتریس ها

۱ : ندارد.

۲ : الف : نادرست ب : درست

۳ :

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۴ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۸ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۸ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

۴ :

$$A\times B=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۶ & ۴y-۳ \\ ۳x+۸ & ۳y-۴ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=B\times A\rightarrow\begin{cases} ۳x+۸=۵\rightarrow x=-۱ \\ ۳y-۴=۲\rightarrow y=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=-۳+۴-۲=-۱$$

۵ : نادرست

۶ :

$$\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰\rightarrow -۳x+۶-۶x+۱۲=۰\rightarrow -۹x+۱۸=۰\rightarrow x=۲$$

۷ :

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=-۲I$$

$$A^۷=(A^۲)^۳.A=(-۲I)^۳.A=-۸I^۳A=-۸IA=-۸A=-۸\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸ :

$$A^۲=B\rightarrow\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases}\rightarrow a=۰ \quad , \quad b=۵$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ b & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲ & -۴+۲a\\ ۲b-۲ & -b-a\end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس قطری باید درایه های غیر واقع بر قطر اصلی صفر باشد، پس :

$$-۴+۲a=۰\rightarrow ۲a=۴\rightarrow a=۲ \qquad \text{و} \qquad ۲b-۲=۰\rightarrow ۲b=۲\rightarrow b=۱$$

۱۱ :

$$\begin{bmatrix}x & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}x-۳ & ۱۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow ۳x-۲۱=۰\rightarrow x=۷$$

۱۲ : ندارد.

۱۳ : نادرست

۱۴ :

$$\begin{bmatrix}۲x & ۴x-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & y-۲\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}۲x=۴\rightarrow x=۲\\ ۴x-۲=y-۲\rightarrow y=۸\end{cases}$$

۱۵ :

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰\rightarrow ۲a=۸\rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\rightarrow b=۳\end{cases}$$

۱۶ : درست

۱۷ :

$$\begin{cases}m-۲=۰\\ n+۱=۰\end{cases}\rightarrow m=۲ \quad , \quad n=-۱$$

$$AB=\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\۲&۰&-۱\\۳&-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲&۲\\۶&۰&-۳\\۹&-۳&۶\end{bmatrix}$$

۱۸ : نادرست

۱۹ :

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴&a\\b&-۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\b-۳&-۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\rightarrow b=۳\end{cases}$$

درس۲ : وارون ماتریس و دترمینان

(❋) دترمینان

۱ :

$$||A|.A|=|-۲A|=(-۲)^{۳}|A|=-۸\times(-۲)=۱۶$$

۲ :

$$|A|=۲(۴-۳)=۲\rightarrow|A^{۳}|=|A|^{۳}=۸$$

۳ : درایه های روی قطر اصلی

۴ :

$$|\frac{۱}{|A|}.A|=|\frac{۱}{۲}A|=(\frac{۱}{۲})^{۳}|A|=\frac{۱}{۸}\times۲=\frac{۱}{۴}$$

۵ : ۳۰-

۶ :

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۱&۳&۱\\۲&۱&۸\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۱&۳&۱\\۲&۱&۸\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۱&۰\\-۱&۳&۲\\۲&۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۱۲\\۱&۱۰&۱۱\\۱۹&۵&۴۲\end{bmatrix}$$

$$|B|=۲(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۳&۲\\۰&۵\end{vmatrix}+۱(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}-۱&۲\\۲&۵\end{vmatrix}+۰(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}-۱&۳\\۲&۰\end{vmatrix}$$

$$=۲(۱۵)-۱(-۹)+۰(-۶)=۳۹$$

۷ : -۸

۸ :

$$BA=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۰&۱\\۲&۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۴&۱\\-۱&۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۱&-۱\\-۱&۳&۲\\۱&۱۷&۸\end{bmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۳&۲\\۱۷&۸\end{vmatrix}+۱(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}-۱&۲\\۱&۸\end{vmatrix}+-۱(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}-۱&۳\\۱&۱۷\end{vmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱۰)-۱(-۱۰)-۱(-۲۰)=-۳۰+۱۰+۲۰=۰$$

۹ : درست

۱۰ :

$$\begin{cases}m-۲=۰\\n+۱=۰\end{cases}\rightarrow m=۲\ ,\ \ n=-۱$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}۲&m-۲\\n+۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\rightarrow|A|=۲$$

$$\rightarrow B=\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\m&۰&n\\۳&-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\۲&۰&-۱\\۳&-۱&۲\end{bmatrix}\rightarrow|B|=۲(-۱)-۱(۷)+۱(-۲)=-۱۱$$

$$|A|+|B|=۲+(-۱۱)=-۹$$

۱۱ : ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم. در اینجا این محاسبه را به روش ساروس انجام می دهم.

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ -۴ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ -۴ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$|A|=(-۱)(۲)(۵)+(۰)(۲)(-۴)+(۰)(۰)(۴)-(۰)(۲)(-۴)-(۰)(۰)(۵)-(-۱)(۲)(۴)$$

$$\rightarrow |A|=-۱۰+۸=-۲$$

$$||A|A|=|-۲A|=(-۲)^۳\,|A|=(-۸)\times(-۲)=۱۶$$

۱۲: $\frac{۵}{۸}$

۱۳:

$$|A|=۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}=۲\times۱۰=۲۰$$

$$|B|=۳\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}=۳\times(-۲)=-۶\rightarrow|B^۲|=|B|^۲=۳۶$$

$$|A|+|B^۲|=۲۰+۳۶=۵۶$$

۱۴:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$mA+۲I_۲=m\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۴m \\ ۲m & m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & ۴m \\ ۲m & m+n \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} n=۸ \\ m=۱ \end{cases}$$

۱۵:

$$|A|=(۴-۹-۴)-(-۴-۱۲+۳)=-۹+۱۳=۴$$

$$|B|=-۶$$

$$|A+B|+|۲I_۳|=|A|\times|B|=۸|I|=(۴)(-۶)+۸=-۲۴+۸=-۱۶$$

۱۶ : ۸

۱۷ :

الف : خیر، زیرا دو ماتریس هم مرتبه نیستند.

ب :

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۴ & -۲\\ -۴ & ۶ & -۴\\ -۸ & ۱۱ & -۶\end{bmatrix}\rightarrow |A\times B|=۰$$

۱۸ : درست

۱۹ :

$$B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |AB|=۴(۶)-۱(-۶)+۵(-۶)=۰$$

۲۰ :

$$||A|\times A|=|۴A|=۴^۳\,|A|=۴^۳\times ۴=۴^۴$$

(*) وارون ماتریس

۱ : غیر صفر

۲ : $|A|=۰\rightarrow ۲m-۴=۰\rightarrow m=۲$

۳ : -۶

۴ : الف : گیریم که $|A|=d$ باشد. در این صورت :

$$d=۵d-۲۴\rightarrow d=۶$$

ب :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

۵ : فرض کنید که $|A|=d$ باشد. در این صورت :

$$۲A=\begin{bmatrix}|A| & -۴\\ ۱ & |A|\end{bmatrix}\rightarrow ۲A=\begin{bmatrix}d & -۴\\ ۱ & d\end{bmatrix}\rightarrow |۲A|=\begin{vmatrix}d & -۴\\ ۱ & d\end{vmatrix}$$

$$\rightarrow ۲|A|=d^{۲}+۴\rightarrow ۲d=d^{۲}+۴\rightarrow d^{۲}-۲d+۴=۰\rightarrow (d-۲)^{۲}=۰\rightarrow d=۲$$

$$\rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۲}$$

۶ :

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\rightarrow |A^{-۱}|=۸$$

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{|A^{-۱}|}(A^{-۱})^{*}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$$

(❋) حل دستگاه معادلات

۱ :

$$\begin{vmatrix}m-۳ & ۳\\ ۴ & m+۱\end{vmatrix}\neq ۰\rightarrow (m-۳)(m+۱)-۱۲\neq ۰\rightarrow m\neq ۵\ ,\ m\neq -۳$$

$$m\in R-\{۵,-۳\}$$

۲ :

$$\frac{m}{۴}=\frac{۳}{m+۴}\neq\frac{-۳}{۲}\rightarrow m(m+۴)-۱۲=۰\rightarrow\begin{cases}m=-۶\\ m=۲\end{cases}$$

که $m=-۶$ قابل قبول نیست.

۳ : نادرست

۴ :

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۴ \\ x-y=۳ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=(۳)(-۱)-(۱)(۲)=-۳-۲=-۵$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}D \to X=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۴}{۵}+\frac{۶}{۵} \\ \frac{۴}{۵}+\frac{-۹}{۵} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow x=۲ \quad , \quad y=-۱$$

۵ : نادرست

۶ :

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=(۳)(۲)-(-۱)(-۴)=۶-۴=۲$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}D \to X=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۲ \\ \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow x=۳ \quad , \quad y=۲$$

۷ :

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\longrightarrow |A|=۱۳\neq ۰$$ لذا دستگاه دارای جواب است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\rightarrow x=۳\quad ,\quad y=۲$$

۸:

$$\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+x & ۴+۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=۴+۲x+۴+۲x=۰\rightarrow x=-۲$$

۹:

$$\frac{۲m}{۲}\neq\frac{۳}{-۱}\rightarrow m\neq-۳$$

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow|A|=-۱۰\neq۰$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=-۱\end{cases}$$

۱۰ : دستگاه مورد انتظار مسئله به صورت زیر است.

$$\begin{cases}۳x-۵y=۱\\ ۴x+۲y=۱۰\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\rightarrow|A|=(۳)(۲)-(-۵)(۴)=۶+۲۰=۲۶$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}\rightarrow x=۲\quad ,\quad y=۱$$

۱۱ : نادرست

۱۲ :

الف :

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix} = ۰ \rightarrow ۶ + ۲m = ۰ \rightarrow m = -۳$$

ب :

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۱۳ :

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases} \xrightarrow{A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}} |A| = ۳ + ۱۰ = ۱۳$$ دستگاه دارای جواب است.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = A^{-۱}B = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} -۱ + ۴۰ \\ ۲ + ۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow x = ۳ \;,\; y = ۲$$

۱۴ :

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۳ + ۸ = ۱۱$$ دستگاه جواب دارد.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}A^{*} = \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱}D = \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۱۵ :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{۲}{m-۱} = \frac{m}{۱} \neq \frac{۱}{۳} \rightarrow m(m-۱) = ۲ \rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۲ \end{cases}$$

۱۶:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \to X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$$

❋❋❋

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل دوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱ : نادرست

۲ : درست

۳ : درست

۴ : نقطه

۵ : بیضی

۶ : خط

۷ : نادرست

۸ : درست

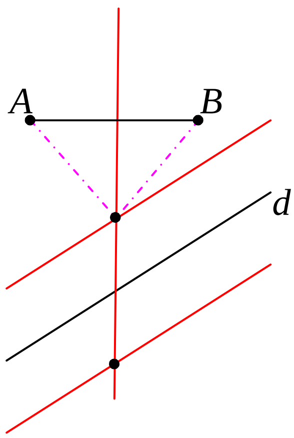
(❋) مکان هندسی

۱ : نادرست

۲ : ویژگی مشترک

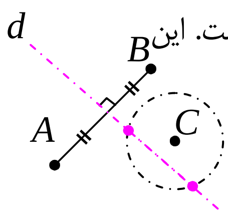
۳ : بیضی

۴ : مکان هندسی نقاط که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر در دو طرف آن هستند. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' خطوط موازی d جواب مسئله است.



بحث : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله د جواب دارد. اگر l با دو خط d' و d'' موازی باشد، مسئله جواب ندارد. اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد. مسئله بیشمار جواب دارد.

۵ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را خط d می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز C و شعاع۳ سانتی متر است. این دایره را رسم می کنیم. محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است.

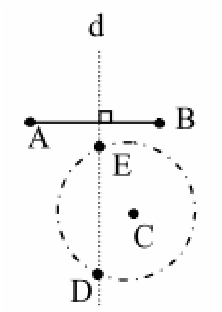


بحث :

اگر خط d دایره را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر خط d دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

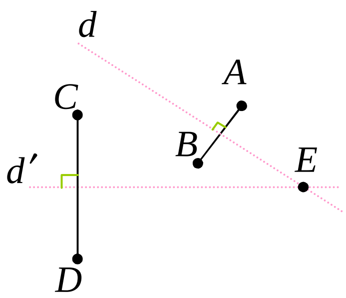


۶ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ واحد است، دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف d و دایره جواب مسئله است که در شکل مقابل نقاط D و E می باشند. حال اگر خط عمود منصف d و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند، مسئله یک جواب و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.

۷ : درست

۸ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را d می نامیم و مکان هندسی نقاطی که اط دو نقطه‌ی C و D به یک فاصله باشد. عمود منصف پاره خط CDدر

است. این خط را d' می نامیم. بنابراین نقطه‌ی برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه‌ی E)



بحث :

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بیشمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.

۹ : درست

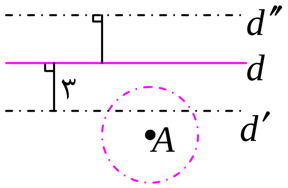
۱۰ : الف : درست ب : درست

۱۱ : درست

۱۲ : مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله‌ی سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی متر است.

این دایره را رسم می کنیم. نقاطی که از d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد، دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به موازات d است، این دو خط را رسم می کنیم، محل برخورد d' و d'' با دایره، مطابق شکل جواب مسأله است.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسأله ۲ جواب دارد.



اگر یکی از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر هیچ یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۱۳ : نادرست

۱۴ : مشترک

۱۵ : مشترک

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

۱ : $O\left|\begin{array}{l}\dfrac{۴+(-۲)}{۲}=۱\\[2mm] \dfrac{-۱+۱}{۲}=۰\end{array}\right. \to O(۱,۰)$ مرکز دایره

طول شعاع دایره $r=\dfrac{AB}{۲}=\dfrac{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}{۲}=\dfrac{۲\sqrt{۱۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$

معادله‌ی دایره $(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=(\sqrt{۱۰})^۲ \to (x-۱)^۲+y^۲=۱۰$

۲ :

$$a^۲+b^۲-۴c>۰ \to ۹+۲۵-۴a>۰ \to ۴a<۳۴ \to a<\frac{۱۷}{۲}$$

۳ :

$O(۰,۰)$ و $O'(۱,۰)$ و $r=۲$ و $r'=\sqrt{۵}$

طول خط المرکزین $OO'=\sqrt{(۱)^۲+(۰)^۲}=۱$

$$\left.\begin{array}{l} r+r'=\sqrt{5}+2 \\ |r-r'|=\sqrt{5}-2 \end{array}\right\} \rightarrow |r-r'|<OO'<r+r' \rightarrow$$ دو دایره متقاطع می باشند.

۴:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \rightarrow O(2,-1)$$

$$R=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$ شعاع دایره

$$\rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$$ معادله‌ی دایره

۵:

$$x^2+y^2-2x-2y=3 \rightarrow O\left|\begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{array}\right.$$

$$m_{OA}=\frac{3-1}{2-1}=2 \rightarrow m'=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$$ معادله‌ی خط مماس

۶:

$$x^2+y^2=1 \rightarrow \begin{cases} O_1(0,0) \\ R_1=1 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-6x-2y+9=0 \rightarrow \begin{cases} O_2(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \rightarrow O_2(3,1) \\ R_2=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-36}=1 \end{cases}$$

$$d=O_1O_2=\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

و چون $d>R_1+R_2$ لذا دو دایره متخارج هستند.

۷:

$$r=OM=\sqrt{(1+2)^2+(-1-3)^2}=5$$ اندازه‌ی شعاع دایره

$(x+2)^2+(y-3)=25$ معادله‌ی دایره

۸ : چون $x^2+y^2=2$ معادله ی دایره است. پس $O(0,0)$ مرکز دایره و $r=\sqrt{2}$ اندازه‌ی شعاع آن است.

$$\xrightarrow{x+y-2=0} d=\frac{|1(0)+1(0)-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\to r=d$$

خط بر دایره مماس است.

۹ : نادرست

۱۰ :

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9\to O'(-1,2)\quad ,\ r'=3$$

$$d=OO'=\sqrt{3^2+4^2}=5\xrightarrow{d=r+r'}r+r'=5\xrightarrow{r'=3}r=2$$

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

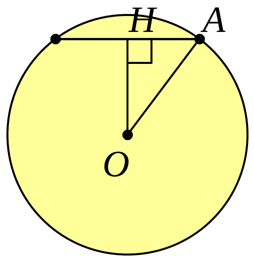
۱۱ :

$$(x-2)^2+(y+2)^2=1\to O(2,2)\quad ,\quad r=1$$

$d=\dfrac{|3(2)+2|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}\to d>r$ خط و دایره نقطه‌ی برخورد ندارند.

۱۲ :

$$OH=\frac{|2(-1)+1(-1)-2|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



$$\Delta(AOH):\xrightarrow{\angle H=90^\circ}OH^2+AH^2=OA^2\to(\sqrt{5})^2+(2)^2=R^2\to R=3$$

$$\to(x+1)^2+(y+1)^2=9$$

۱۳ : ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می آوریم.

$$x^2+y^2-2x+2y=0\to\begin{cases}O(1,-1)\\R=\sqrt{2}\end{cases}$$

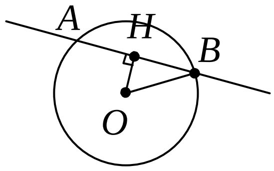
$OA=۱ \rightarrow OA<R$

لذا نقطه‌ی داده شده ، داخل دایره است.

۱۴ : برای نوشتم معادله ی دایره ، به مختصات مرکز دایره و اندازه ی شعاع دایره نیاز است.

در اینجا مختصات مرکز دایره را داریم. اما برای تعیین اندازه‌ی شعاع دایره کافی است از مثلث قائم الزاویه‌ی OBH کمک بگیریم. طبق قضایای هندسه می دانیم که اگر از مرکز دایره بر وتر عمودی رسم کنیم، آن وتر نصف می شود.

پس :



$$BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

برای محاسبه‌ی اندازه‌ی OH کافی است، فاصله‌ی مرکز دایره را تا خط $x+y=۲$ به دست آوریم.

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(۱)+۱(۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{|۱(۰)+۱(۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

لذا :

$$\Delta(OBH): OB^۲=OH^۲+BH^۲ \xrightarrow{OB=R} R^۲=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\sqrt{۲})^۲=\frac{۵}{۲}$$

در نهایت معادله‌ی دایره را به شکل زیر می نویسیم.

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \rightarrow (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۵}{۲}$$

۱۵ :

$$x^۲+y^۲-۲x-۴=۰$$

$$\xrightarrow{a=-۲,b=۰,c=-۴}\begin{cases} O_۱(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \rightarrow O_۱(-۱,۰) \\ R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۶}=\sqrt{۵} \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲=۴ \rightarrow \begin{cases} O_۲(۰,۰) \\ R_۲=۲ \end{cases}$$

$d=O_۱O_۲=\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲}=۱$ طول خط المرکزین

$R_1 + R_2 = \sqrt{5} + 2$

$R_1 - R_2 = \sqrt{5} - 2$

$\sqrt{5} - 2 < 1 < \sqrt{5} + 2 \rightarrow R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$

پس یعنی دو دایره متقاطع هستند.

۱۶ : نادرست

۱۷ :

شعاع دایره $R = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|4(3) + 3(1) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$

معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

۱۸ :

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = -3$

$\rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -3 + 1 + 4 \rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

مختصات مرکز دایره $O(1,-2)$ اندازه‌ی شعاع دایره $R = \sqrt{2}$

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده را تعیین نموده و اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می کنیم.

$$D = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (-1)(-2) + (-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1 + 2 - 1}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

و چون $D = R$ پس خط داده شده بر دایره مماس است.

۱۹ :

$x^2 - 8x + y^2 + 4y = -16 \rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = -16 + 16 + 4$

$\rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$ معادله‌ی دایره

$O'(4,2)$ مختصات مرکز دایره $R' = \sqrt{4} = 2$ اندازه‌ی شعاع دایره

طول خط المرکزین $OO' = \sqrt{(۴)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$

$$|R - R'| = OO' \to |R - ۲| = ۵ \to \begin{cases} R = ۷ \\ R = -۳ \end{cases}$$

$R = -۳$ غیر قابل قبول است. لذا معادله‌ی دایره‌ی مماس می شود.

معادله‌ی دایره‌ی مطلوب $(x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۴۹$

۲۰ : نادرست

۲۱ :

شعاع دایره $\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases} \xrightarrow{x=۲\ ,\ \ y=-۱} R = \dfrac{|۴(۲) + ۳(-۱) + ۵|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \dfrac{۱۰}{۵} = ۲$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع دایره برابر $R = ۲$ است و لذا معادله‌ی دایره می شود.

$$(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۴$$

۲۲ :

$(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱ \to \begin{cases} O_۱(۱,۰) \\ R_۱ = ۱ \end{cases}$ و $x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱ \to \begin{cases} O_۲(۰,۱) \\ R_۲ = ۱ \end{cases}$

فاصله‌ی دو مرکز برابر $O_۱O_۲ = \sqrt{۲}$ و $R_۱ + R_۲ = ۲$ و $R_۱ - R_۲ = ۰$

$$|R_۱ - R_۲| < O_۱O_۲ < R_۱ + R_۲$$

بنابراین دو دایره‌ی متقاطع اند.

۲۳ : فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با :

شعاع دایره $R = \dfrac{|۳(۲) + ۴(۱) + ۵|}{\sqrt{(۳)^۲ + (۴)^۲}} = \dfrac{۱۵}{۵} = ۳$

معادله‌ی دایره $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲ \to (x - ۲)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۹$

۲۴ :

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \to (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱ \to \begin{cases} O(۳,۱) \\ R=۱ \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲=۱ \to \begin{cases} O'(۰,۰) \\ R'=۱ \end{cases}$$

$d=OO'=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$ اندازه‌ی خط المرکزین

$$R+R'=۱+۱=۲$$

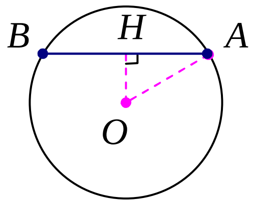
$$\to d>R+R'$$

لذا دو دایره بیرون یکدیگرند(متخارج)

۲۵ : نادرست

۲۶ : از مرکز دایره بر وتر عمود می کنیم. عمود OH وتر AB را نصف می کند.

$$OH=\frac{|(۱)(۰)+(۱)(۱)+(-۲)|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



$$OA^۲=OH^۲+AH^۲ \to OA^۲=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲ \to OA^۲=\frac{۱۰}{۴} \to R^۲=\frac{۱۰}{۴}$$

$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۱۰}{۴}$ معادله‌ی دایره

۲۷ :

$O(۱,۱)$مختصات مرکز دایره

AO شیب $m=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

A شیب خط مماس بر دایره گذرا از $m'=-\frac{۱}{m}=-\frac{۱}{۲}$

معادله‌ی خط مماس $y=m(x-x_A)+y_A \to y=-\frac{۱}{۲}(x-۲)+۳$

۲۸:

$$R = OM = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

$$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$$ معادله‌ی دایره

۲۹:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳ \to (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

$O(۱,۱)$ مختصات مرکز دایره

$$m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲ \to m' = -\frac{۱}{m} = -\frac{۱}{۲}$$ شیب خط مماس

$$y - ۲ = -\frac{۱}{۲}(x-۳)$$ معادله‌ی خط مماس

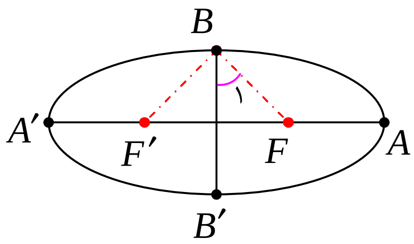
❋❋❋

درس ۳ : بیضی و سهمی

(❋) بیضی

۱:

$$a = ۲b \to c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \to c = \sqrt{۳}b$$



$$\tan B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \to B_۱ = ۶۰^\circ \to FBF' = ۲ \times ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

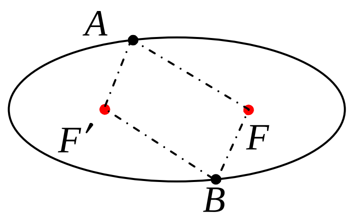
۲: دایره

۳:

$$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \to c = \frac{۳}{۵}a \quad , \quad b = ۸ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ = ۶۴ + \frac{۹}{۲۵}a^۲ \to a = ۱۰ \, , \; c = ۶$$

لذا طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله‌ی کانونی ۱۲ می باشند.

۴ : دو نقطه‌ی A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$AF+AF'=۲a \quad (۱)$$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$BF+BF'=۲a \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می شود: $AF=BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی الاضلاع است و چون در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبرو موازی اند،

پس : $AF \parallel BF'$

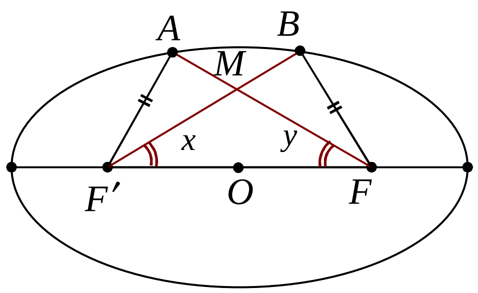
۵ :

$$AA'=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۱۲+۸)^۲}=۲۰ \xrightarrow{AA'=۲a} ۲a=۲۰ \to a=۱۰$$

$$e=\frac{c}{a} \xrightarrow{e=\frac{۳}{۵}} \frac{c}{a}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow{a=۱۰} \frac{c}{۱۰}=\frac{۳}{۵} \to c=۶$$

$$FF'=۲c \xrightarrow{c=۶} FF'=۱۲$$ فاصله‌ی کانونی

۶ :



$$\left.\begin{array}{r} AF+AF'=۲a \\ BF+BF'=۲a \\ BF=AF' \end{array}\right\} \to AF=BF'$$

$$\left.\begin{array}{l} AF=BF' \\ AF'=BF \\ FF'=FF' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ض ض ض)}]{} \Delta(AFF')\cong\Delta(BFF') \to \angle x=\angle y$$

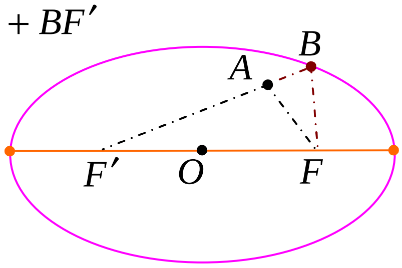
پس مثلث FMF' دو زاویه‌ی مساوی دارد، لذا متساوی الساقین است.

۷ : چون نقطه‌ی A درون بیضی باشد. در این صورت امتداد AF (یا AF') بیضی را در نقطه ای مانند B قطع می کند. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می توان نوشت:

$$AF < AB + BF \xrightarrow{+AF'} AF + AF' < AF' + AB + BF$$

$$\rightarrow AF + AF' < \underbrace{AF' + AB}_{BF'} + BF \rightarrow AF + AF' < BF + BF'$$

$$\xrightarrow{BF+BF'=۲a} AF + AF' < ۲a$$



۸:

$$\begin{cases} ۲a = ۱۰ \rightarrow a = ۵ \\ ۲b = ۶ \rightarrow b = ۳ \end{cases} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} c = ۴$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

۹: درست

۱۰:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow c = ۴$$

$$FF' = ۲c = ۲(۴) = ۸$$

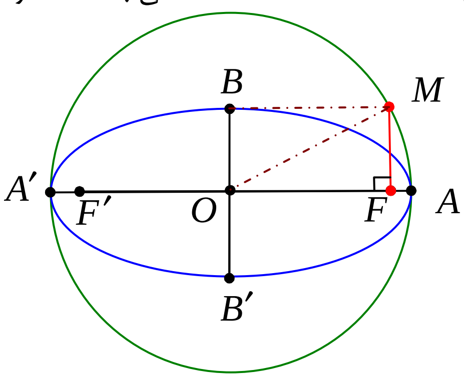
$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \rightarrow MF' = ۱۰ - MF$$

$$(MF)^۲ + (MF')^۲ = (FF')^۲ \rightarrow (MF)^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = (۸)^۲ \rightarrow MF = ۵ \pm \sqrt{۷}$$

۱۱: بیرون

۱۲: نادرست

۱۳: طبق مسئله $OM = OA = a$ می باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OMA می توان نوشت:



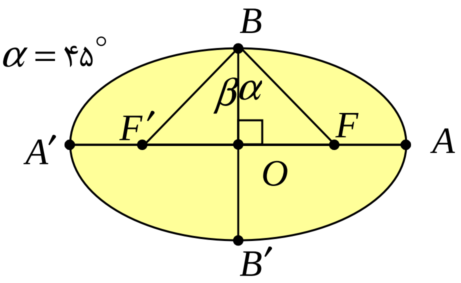
$$OM = OA = a$$

$$OF = c$$

$$OM^{۲} = OF^{۲} + MF^{۲}$$

$$\to a^{۲} = c^{۲} + MF^{۲} \to MF^{۲} = a^{۲} - c^{۲} \xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}} MF^{۲} = b^{۲} \to MF = b$$

۱۴ :



$$۲a = \sqrt{۲} \to a = b\sqrt{۲} \to \cos\alpha = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{b\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \to \alpha = ۴۵^{\circ}$$

$$\angle FBF' = ۲ \times ۴۵ = ۹۰^{\circ}$$

۱۵ :

$$BB' = ۲b = ۲۴ \to b = ۱۲$$

$$OF = c = ۵$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \to a^{۲} = ۱۴۴ + ۲۵ \to a^{۲} = ۱۶۹ \to a = ۱۳$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۱۳}$$

۱۶ : صفر

۱۷ :

قطر بزرگ $AA' = ۲a = ۲۰ \to a = ۱۰$

خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} \to \frac{۴}{۵} = \frac{c}{۱۰} \to c = ۸$

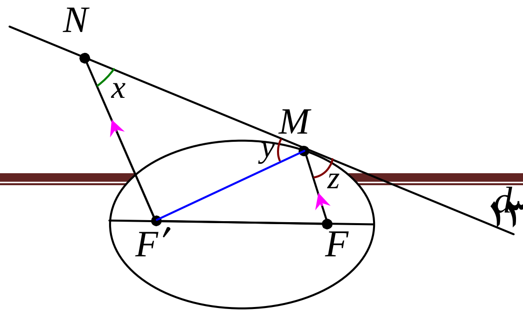
فاصله‌ی کانونی $FF' = ۲c = ۲ \times ۸ = ۱۶$

رابطه ی طلایی بیضی $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \to ۱۰۰ = b^{۲} + ۶۴ \to b^{۲} = ۳۶ \to b = ۶$

طول قطر بزرگ بیضی $BB' = ۲b = ۲ \times ۶ = ۱۲$

۱۸ : طبق ویژگی خط مماس بر بیضی

داریم، $\angle y = \angle z$ و چون $NF' \parallel MF$



پس $\angle x = \angle z$. لذا $\angle x = \angle y$

یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد،

در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF' = MF'$

۱۹: $\frac{۱}{۲}$

۲۰:

$$\left.\begin{matrix} OF = c = ۴ \\ OA = a = ۸ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} ۶۴ = b^۲ + ۱۶ \to b^۲ = ۴۸ \to b = ۴\sqrt{۳}$$

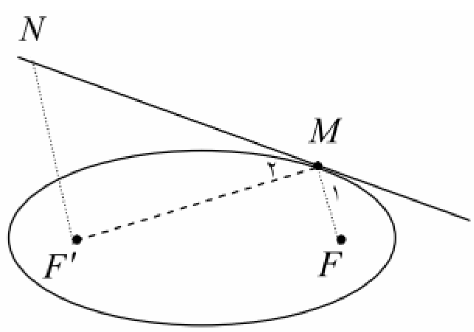
$BB' = ۲b = ۸\sqrt{۳}$ طول قطر کوچک

۲۱: مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است. بنابه خاصیت کوتاه ترین مسیر، زاویه های $\angle M_۱ = \angle M_۲$.

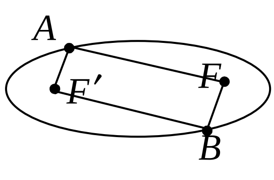
از طرفی چون $MF \parallel NF'$ و d مورب است، پس $\angle N = \angle M_۱$

اکنون از این دو نتیجه می توان نوشت : $\angle N = \angle M_۲$

یعنی مثلث MNF' متساوی الساقین است و لذا : $MF' = NF'$



۲۲: نقاط A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی $AF + AF' = ۲a$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی $BF + BF' = ۲a$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF' = BF)$ نتیجه‌ی می شود $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی الاضلاع است، پس $AF \parallel BF'$

۲۳ : دایره

۲۴ : نقطه‌ی B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد. در نتیجه : $BF = BF'$

فاصله‌ی هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF=BF'} BF = BF' = a$$

بنابر رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث BOF داریم : $OF^۲ + OB^۲ = BF^۲$ یعنی $b^۲ + c^۲ = a^۲$

۲۵ :

$$\begin{cases} ۲a = ۱۰ \\ ۲b = ۶ \end{cases} \to a = ۵\ ,\ \ b = ۳ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} c = ۴$$

در مثلث MFF' میانه‌ی وارد بر یک ضلع $MO = \frac{۱}{۲} FF' = ۴$ نصف ضلع روبرو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم الزاویه است.

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \to MF' = ۱۰ - MF$$

$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \to MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \to MF = ۵ - \sqrt{۷}$$

۲۶ : نقطه‌ی A و A' روی بیضی قرار دارند، بنابه تعریف داریم $A'F' + A'F = ۲a$ و $AF' + AF = ۲a$

نتیجه می گیریم که :

$$A'F' + A'F = AF + AF' \to A'F' + (A'F' + FF') = AF + (AF + FF')$$

$$\to A'F' = AF$$

۲۷ :

$$\cos(\angle OBF) = \frac{OB}{BF} \xrightarrow{BF = a\ ,\ OB = b} \cos(\angle OBF) = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$\rightarrow \angle OBF = ۳۰^\circ \rightarrow \angle F'BF = ۲(\angle OBF) = ۶۰^\circ$

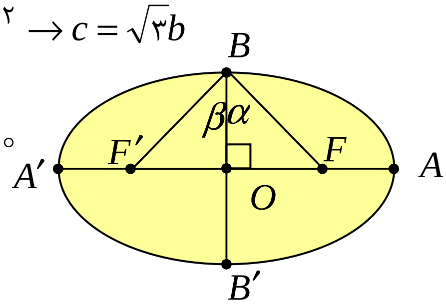
۲۸ : پاره خط **۲۹ :** نادرست **۳۰ : خارج**

۳۱ :

$a = ۲b \rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \rightarrow c = \sqrt{۳}b$

$\tan\alpha = \dfrac{OF}{OB} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$

$FBF' = ۲\alpha = ۲ \times ۶۰ = ۱۲۰$



۳۲ :

نقطه‌ی B روی بیضی است $BF + BF' = ۲a$

از طرفی نقطه‌ی B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد، بنابراین $BF = BF' = a$

در مثلث قائم الزاویه‌ی OFB داریم، $OB^۲ + OF^۲ = BF^۲$ و لذا $b^۲ + c^۲ = a^۲$

(❋) سهمی

۱ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات معلوم می شود که سهمی قائم رو به پایین می باشد و لذا :

پارامتر سهمی $p = ۴$

معادله‌ی سهمی $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$

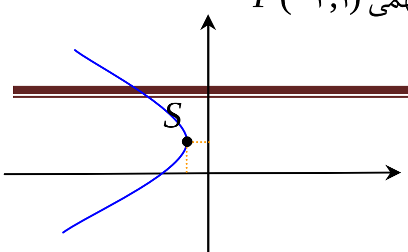
معادله‌ی خط هادی $y = ۶$

۲ : الف :

$y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰ \rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = -۸x - ۸ \rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱)$

$\rightarrow S(-۱,۱)$ رأس سهمی

دهانه‌ی سهمی به سمت چپ و $p = ۲$ ، معادله‌ی خط هادی $x = ۱$ ، کانون سهمی $F(-۳,۱)$



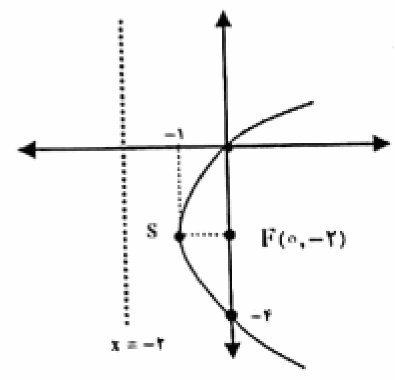
ب : نقاط کمکی $B'(-۳,-۳)$ و $B(-۳,۵)$

۳ :

سهمی افقی مثبت $y^۲=۴x-۴y \to y^۲+۴y=۴x+۴ \to (y+۲)^۲=۴(x+۱)$

$x=-۲$ خط هادی $\quad F(۰,-۲)$ کانون سهمی $\quad S(-۱,-۲)$ رأس سهمی

نقاط کمکی برای ترسیم $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$



۴ : سهمی

۵ : الف : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی ، دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و $a=۴$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $(x-۲)^۲=-۱۶(y-۳)$

$-۴p=-۱۶ \to p=۴$

ب : مختصات کانون سهمی برابر $F(\alpha,\beta-p) \to F(۲,۳-۴) \to F(۲,-۱)$

۶ :

سهمی افقی مثبت $y^۲=۴(x-۱)$

پارامتر سهمی $۴p=۴ \to p=۱$, و رأس سهمی $\to S(۱,۰)$

کانون سهمی $\to F(۲,۰)$

معادله‌ی دایره‌ی مورد اشاره $(x-۲)^۲+y^۲=۹$

$$\begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \rightarrow -x^۲ + ۴x + ۵ = ۴x - ۴ \rightarrow x = \pm ۳$$

که پاسخ $x = -۳$ غیر ممکن است.

$$\rightarrow \begin{cases} M(۳, ۲\sqrt{۲}) \\ M'(۳, -۲\sqrt{۲}) \end{cases}$$ نقاط برخورد سهمی و دایره

۷ : کانون سهمی

۸ :

$$x^۲ - ۴y + ۸x = ۰ \rightarrow x^۲ + ۸x + ۱۶ = ۴y + ۱۶ \rightarrow (x + ۴)^۲ = ۴(x + ۴)$$

سهمی قائم و رو بالا است.

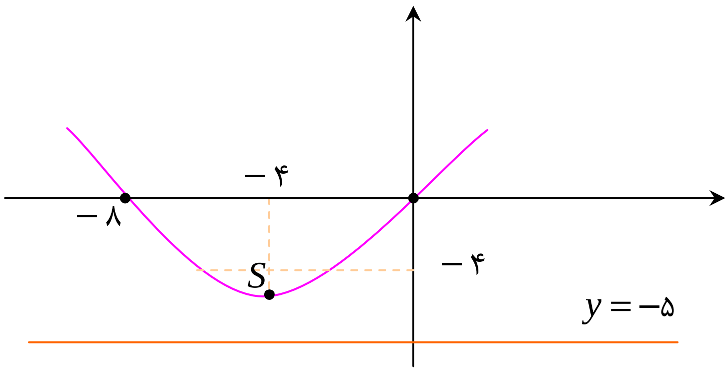
$S(-۴, -۴)$ رأس سهمی

$۴p = ۴ \rightarrow p = ۱$ پارامتر سهمی

$F(\alpha, \beta + p) \rightarrow F(-۴, -۴ + ۱) \rightarrow F(-۴, -۳)$ کانون سهمی

$y = \beta - p \rightarrow y = -۴ - ۱ = -۵$ معادله‌ی خط هادی سهمی

$y = -۳ \rightarrow \begin{cases} B(-۲, -۳) \\ B'(-۶, -۳) \end{cases}$ نقاط کمکی



۹ :

$$y^۲ = ۴(x - ۱) \rightarrow S(۱, ۰) \quad , \quad F(۲, ۰)$$

معادله‌ی دایره $(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۹$

$$\begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ (x - ۲)^۲ + y^۲ = ۹ \end{cases} \rightarrow (x - ۲)^۲ + ۴x - ۴ = ۹ = x^۲ - ۴x + ۴ + ۴x - ۴ = ۹$$

$$\rightarrow x^{2}=9 \rightarrow x=\pm 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} M(3,2\sqrt{2}) \\ M'(3,-2\sqrt{2}) \end{cases}$$

۱۰:

$$x^{2}+4x=2y \xrightarrow{+4} x^{2}+4x+4=2y+4 \rightarrow (x+2)^{2}=2(y+2)$$

با مشاهده‌ی این معادله ، معلوم می شود که سهمی، قائم رو به بالا است و پارامتر سهمی $p=\frac{1}{2}$ می باشد.

$$4p=2 \rightarrow p=\frac{1}{2}$$

مختصات رأس سهمی هم به صورت $(-2,-2)$ است.

مختصات کانون سهمی را هم می توان به صورت زیر تعیین نمود.

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p) \rightarrow F(-2,-2+\frac{1}{2}) \rightarrow F(-2,-\frac{3}{2})$

برای تعیین مختصات نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات یک بار x و یک بار y را برابر صفر قرار می دهیم. لذا

محل برخورد با محور x ها $y=0 \xrightarrow{x^{2}=2y-4x} x^{2}=2(0)-4x \rightarrow x=0\,,\; x=-4$

$$\rightarrow A(0,0) \qquad , \qquad B(0,-4)$$

محل برخورد با محور y ها $x=0 \xrightarrow{x^{2}=2y-4x} (0)^{2}=2y-4(0) \rightarrow y=0 \rightarrow C(0,0)$

۱۱: نقطه

۱۲:

$$y^{2}-6y+16x+25=0 \rightarrow y^{2}-6y+9=-16x-16 \rightarrow (y-3)^{2}=-16(x+1)$$

لذا فرم استاندارد سهمی به صورت $(y-3)^{2}=-16(x+1)$ است. سهمی افقی و دهانه‌ی سهمی به سمت چپ باز می شود. رأس سهمی نقطه‌ی $S(-1,3)$ است و $p=4$ مختصات کانون آن نقطه‌ی

$F(\alpha-p,\beta)=(-۵,۳)$ است. معادله‌ی خط هادی سهمی به صورت $x=p+\alpha=۳$ است.

۱۳ : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است و $p=۳$ فرم استاندارد سهمی به صورت:

$$(x-h)^۲=۴p(y-k)\rightarrow(x-۴)^۲=۱۲(y-۶)$$

۱۴ : $(\frac{۱}{۲}\,,۱)$

۱۵ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و $a=۴$

معادله‌ی سهمی $(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادله‌ی خط هادی $y=۶$

۱۶ : درست

۱۷ : الف : با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $p=۴$

دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و لذا معادله‌ی سهمی می شود $(x-۲)^۲=-۴(۴)(y-۳)$

ب : مختصات کانون سهمی می شود $F(۲,-۱)$

۱۸ : اگر قطر دهانه دیش را با $۲b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم. فاصله‌ی کانونی برابر $p=\frac{b^۲}{۴h}$ است. اکنون با توجه به این مسأله داریم :

$$\begin{cases}۲b=۶۰\rightarrow b=۳۰\\ h=۹\end{cases}\rightarrow p=\frac{۴b^۲}{۱۶h}=\frac{b^۲}{۴h}=\frac{۹۰۰}{۴(۹)}=۲۵$$

۱۹ :

$$y^۲-۲y+۱=-۸x-۹+۱\rightarrow(y-۱)^۲=-۸(x+۱)$$

سهمی افقی رو به سمت چپ $-۴p=-۸\rightarrow p=۲$

مختصات رأس $\rightarrow S(-۱,۱)$

مختصات کانون $F(-۳,۱)$

$x=۱$ معادله‌ی خط هادی

۲۰:

$$y^۲=۲x+۴y\rightarrow(y-۲)^۲=۲(x+۲)$$

نوع سهمی افقی رو به راست می باشد. مختصات رأس سهمی $(-۲,۲)$ و پارامتر سهمی برابر $p=\frac{۱}{۲}$

مختصات کانون سهمی برابر با $(-\frac{۳}{۲},۲)$، معادله‌ی خط هادی برابر است با $x=-\frac{۵}{۲}$ است و مختصات نقاط برخورد با محور y ها برابر با $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$ و محور x ها $(۰,۰)$

❋❋❋

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل سوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱ : درست

۲ : الف : $z=۴$ ب : محور y ها

پ : نقطه‌ی $A(۲,۰,۰)$ و مختصات وسط AB برابر است با $(-۱,۳,-\frac{۳}{۲})$

۳ :

$$\begin{cases} -۱\le x\le ۲ \\ y=۱ \\ z=۳ \end{cases}$$
معادلات مربوط به پاره خط AB

۴ :

$$\|AB\|=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۳$$
طول پاره خط AB

$$\begin{cases} x=۳ \\ -۲\le y\le ۱ \\ z=۲ \end{cases}$$
معادلات مربوط به پاره خط AB

۵ :

الف) $A(۰,۴,۳)$

ب) $AD:\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$ و $CDFG:\begin{cases} x=۲ \\ ۰\le y\le ۴ \\ ۰\le z\le ۳ \end{cases}$

۶ : درست

۷ : هر نقطه روی محور x ها، عرض و ارتفاع آن صفر است. پس این معادله نشان دهنده محور x ها است.

معادله‌ی $y=\cdot$ یعنی صفحه‌ی xoz می باشد و محور x ها منطبق بر آن است.

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=\cdot \\ z=\cdot \end{cases}$ در فضای $R^{۲}$ همان معادله‌ی محور y ها است.

معادله‌ی $x=\cdot$ معادله‌ی صفحه‌ی yz که شامل محور y ها است.

ب :

$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۲,-۱,۳)+۲(۱,۲,\cdot)=(۴,۳,۳)$$

$$\|\vec{a}+۲\vec{b}\|=\sqrt{(۴)^{۲}+(۳)^{۲}+(۳)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۹+۹}=\sqrt{۳۴}$$

۹ : نقاط B و A زیرا در این دو نقطه‌ی $y=۲$ و $z=۱$ می باشد.

۱۰ : ۶

۱۱ : الف) $b=-۳$ ب) محور z ها

پ)

$$A(\cdot,۲,۳),B(-۴,۶,-۳)\rightarrow\begin{cases} x_M=\dfrac{\cdot+(-۴)}{۲}=-۲ \\ y_M=\dfrac{۲+۶}{۲}=۴ \\ z_M=\dfrac{۳+(-۳)}{۲}=\cdot \end{cases}\rightarrow M(-۲,۴,\cdot)$$

۱۲ :

الف) $A(۲,\cdot,\cdot)$ و $B(۱,\cdot,۳)$

ب) $\|AB\|=\sqrt{(۲-۱)^{۲}+(\cdot-\cdot)^{۲}+(\cdot-۳)^{۲}}=\sqrt{۱۰}$

پ) $M(\dfrac{۲+۱}{۲},\dfrac{\cdot+\cdot}{۲},\dfrac{\cdot+۳}{۲})=(\dfrac{۳}{۲},\cdot,\dfrac{۳}{۲})$

۱۳ : نادرست

۱۴ : الف: $A=(۲,۰,۰)$ و $B(۰,-۳,۴)$

وسط پاره خط AB $M=(\frac{۲+۰}{۲},\frac{۰+(-۳)}{۲},\frac{۰+۴}{۲})=(۱,-\frac{۳}{۲},۲)$

$$OM=\sqrt{(۱)^۲+(-\frac{۳}{۲})^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۲۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$$

ب : $r=\sqrt{(۳)^۲+(۴)^۲+(۵)^۲}=\sqrt{۹+۱۶+۲۵}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱ :

$\vec{a}=(۳,۲,-۱)$

$r\vec{b}-\vec{a}=۲\vec{b}-\vec{a}=۲(۳,۱,-۱)-(۳,۲,-۱)=(۶,۲,-۲)+(-۳,-۲,۱)=(۳,۰,-۱)$

۲ :

$\vec{a}-۲\vec{b}=(۲,۰,-۱)-(۲,۴,۲)=(۰,-۴,-۳)\rightarrow\|\vec{a}-۲\vec{b}\|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$

۳ :

$\vec{a}=(۰,۲,-۳)$

$\vec{c}=۲\vec{b}-\vec{a}=۲(۰,۱,-۱)-(۰,۲,-۳)=(۰,۲,-۲)+(۰,-۲,۳)=(۰,۰,۱)$

۴ : موازی

۵ :

$\vec{b}=-۶\vec{j}+۸\vec{k}=(۰,-۶,۸)$

$r\vec{b}=-\frac{۱}{۲}(۰,-۶,۸)=(۰,۳,-۴)\rightarrow\|r\vec{b}\|=\sqrt{(۰)^۲+(۳)^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۰+۹+۱۶}=۵$

$$r\vec{a} = -\frac{۱}{۲}(\sqrt{۸}, ۲, ۴) = (-\sqrt{۲}, -۱, -۲)$$

$$r\vec{a} + \vec{b} = (-\sqrt{۲}, -۱, -۲) + (۰, -۶, ۸) = (-\sqrt{۲}, -۷, ۶)$$

۶ : الف: بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی ۵ واقع است.

ب :

$$۲\vec{a} - \vec{b} = ۲(۱,۲,-۱) - (۰,۲,-۱) = (۲,۲,-۱)$$

$$\to \| ۲\vec{a} - \vec{b} \| = \sqrt{۴+۴+۱} = \sqrt{۹} = ۳$$

۷ : yoz

❋❋❋

درس۲ : ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱ :

$$\vec{a}.\vec{b} = ۰ \leftrightarrow \| \vec{a} \| \times \| \vec{b} \| \times \cos\theta = ۰ \xleftrightarrow{\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\| \neq ۰} \cos\theta = ۰ \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۲ : صفر ($\vec{a}.\vec{b} = ۰$)

۳ : برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می توان نوشت، $\| \vec{a} \| \geq ۰$ و $\| \vec{b} \| \geq ۰$ و لذا $\| \vec{a} \| \times \| \vec{b} \| \geq ۰$

از طرفی برای زاویه‌ی θ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $-۱ \leq \cos\theta \leq ۱$ برقرار است. این نامساوی را می توان به صورت $|\cos\theta| \leq ۱$ نیز نوشت. اکنون دو طرف این نامساوی را در عدد نامنفی $\| \vec{a} \| \times \| \vec{b} \|$ ضرب می کنیم. خواهیم داشت:

$$\| \vec{a} \| \times \| \vec{b} \| \times |\cos\theta| \leq \| \vec{a} \| \times \| \vec{b} \| \times ۱$$

$$\to |\vec{a}.\vec{b}| \leq \| \vec{a} \| \times \| \vec{b} \|$$

۴ :

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=(m)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=m+۱$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(m)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{m^۲+۱+۴}=\sqrt{m^۲+۵}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}\times\sqrt{۲}}\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}\times\sqrt{۲}}$$

$$\rightarrow ۱=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}}\rightarrow m+۱=\sqrt{m^۲+۵}\rightarrow m^۲+۲m+۱=m^۲+۵$$

$$\rightarrow ۲m=۴\rightarrow m=۲$$

۵ : صفر

۶ : گیریم که $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ پس :

$$\vec{a}.\vec{a}=a_۱a_۱+a_۲a_۲+a_۳a_۳=a_۱{}^۲+a_۲{}^۲+a_۳{}^۲=\|\vec{a}\|^۲$$

۷ : نادرست

۸ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۰)(۲)+(۱)(-۱)+(۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(۰)^۲+(-۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=۴۵^\circ$$

۹ :

$$\vec{a}.\vec{b}=\circ\rightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=\circ\xrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq\circ}\cos\theta=\circ\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

۱۰ : نادرست

۱۱ :

$$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^{۲}=\|\vec{o}\|^{۲}\to\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^{۲}=۰$$

$$\longrightarrow\|\vec{a}\|^{۲}+\|\vec{b}\|^{۲}+\|\vec{c}\|^{۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$$

$$\to ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰\to\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=-۷$$

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱ :

$$\vec{u}=\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)\to\|\vec{u}\|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\vec{a}.\vec{u}=(-۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۰)(۶)=-۲+۹+۰=۷$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^{۲}}\vec{u}=\frac{۷}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)=(\frac{۲}{۷},-\frac{۳}{۷},\frac{۶}{۷})$$

۲ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۱)(-۲)+(-۳)(۱)+(۲)(-۵)=-۲-۳-۱۰=-۱۵$$

$$\|\vec{b}\|^{۲}=(-۲)^{۲}+(۱)^{۲}+(-۵)^{۲}=۴+۱+۲۵=۳۰$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{-۱۵}{۳۰}(-۲,۱,-۵)=\frac{-۱}{۲}(-۲,۱,-۵)=(۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

۳ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۵)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۵+۱+۰=۶$$

$$\|\vec{b}\|^{۲}=(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۰)^{۲}=۱+۱+۰=۲$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{۶}{۲}(۱,-۱,۰)=۳(۱,-۱,۰)=(۳,-۳,۰)$$

۴ :

$$\vec{a} = r\vec{b}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = r.\vec{b}.\vec{b} = r\|\vec{b}\|^{۲}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b} = \frac{r\|\vec{b}\|^{۲}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$$

۵ : الف :

$$\vec{a}.\overleftarrow{b} = (۱)(-۲) + (۲)(۰) + (۳)(۲) = -۲ + ۰ + ۶ = ۴$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-۲)^{۲} + (۰)^{۲} + (۲)^{۲}} = \sqrt{۴ + ۰ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b} = \frac{۴}{۸}(-۲,۰,۲) = (-۱,۰,۱)$$

ب :

$$۲\vec{a} - \vec{b} = ۲\vec{a} + (-\vec{b}) = ۲(۱,۲,۳) + (۲,۰,-۲) = (۲,۴,۶) + (۲,۰,-۲) = (۴,۴,۴)$$

$$\|۲\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{(۴)^{۲} + (۴)^{۲} + (۴)^{۲}} = \sqrt{۱۶ + ۱۶ + ۱۶} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

۶ :

$$\vec{a}.\vec{b} = (-۲)(۰) + (۰)(۲) + (۲)(۲) = ۴$$

$$\vec{a} = (-۲,۰,۲) \rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{۴ + ۰ + ۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{b} = (۰,۲,۲) \rightarrow \|\vec{b}\| = \sqrt{۰ + ۴ + ۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|} = \frac{۴}{۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta = ۶۰^{\circ}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-۲,۰,۲) + (۰,۲,۲) = (-۲,۲,۴)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{b} = (-۲)(۰) + (۲)(۲) + (۴)(۲) = ۴ + ۸ = ۱۲$$

$$(a+b)'=\frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}=\frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲)=(۰,۳,۳)$$

۷:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b}}{\|\vec{b}\|}\vec{b}=\frac{۲+۱+۰}{۱+۱+۰}(۱,-,۰)=\frac{۳}{۲}(۱\ ,-۱\ ,۰)$$

۸:

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=(۳,-۴,۲)+(-۱,۱,۴)=(۲,-۳,۶)$$

$$\vec{a}.\vec{d}=(۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۴)(۶)=۲+۹+۲۴=۳۵$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{\|\vec{d}\|^{۲}}\vec{d}=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$$

۹:

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۰)^{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$$

***

(*) ضرب خارجی دو بردار

۱:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta\rightarrow ۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}=\pm\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}}=\pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$$

۲ : کافی است یکی از دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۳ & ۲\\ ۱ & -۵\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۵ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۱\end{vmatrix})=(۱۳,۱,-۵)$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(\begin{vmatrix}۱ & -۵\\ -۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۵ & -۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۱ & -۳\end{vmatrix})=(-۱۳,-۱,۵)$$

۳ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\leftrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=\circ$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq\circ}\sin\theta=\circ\leftrightarrow\theta=\cdot\vee\theta=\pi\leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۴ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta\to ۱۲=۸\times۳\times\sin\theta\to\sin\theta=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\pm\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=۸\times۳\times(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\pm۱۲\sqrt{۳}$$

۵ : درست

۶ :

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}.\vec{i}=\|\vec{i}\|^{۲}=۱$$

۷ :

$$\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{k}.\vec{k}=\|\vec{k}\|^{۲}=۱$$

۸ : الف : بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی چهارم است.

ب :

$$\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-۲,۱,-۱)$$

$$\vec{a}+2\vec{b}=(3,-2,1)+2(-2,1,-1)=(-1,0,-1)\rightarrow \|\vec{a}+2\vec{b}\|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

ج :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right)=(1,1,-1)$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\xrightarrow{\exists r\in R}\vec{b}=r\,\vec{a}\rightarrow(b_1,b_2,b_3)=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}ra_2 & ra_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ra_3 & ra_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ra_1 & ra_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=(0,0,0)=\vec{o}$$

اثبات برعکس این مطلب هم می توان به شکل زیر نوشت :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=0$$

$$\xrightarrow{\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta}\sin\theta=0\rightarrow\theta=0\quad or\quad \pi$$

لذا $\vec{a}\parallel\vec{b}$

۱۱ :

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(2,2,-1)$$

۱۲ : صفر

۱۳ : درست

۱۴ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\leftrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=0$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\neq 0}\sin\theta=0\rightarrow\theta=0\quad or\quad\theta=\pi\leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۱۵ : درست

۱۶ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\|\vec{a}\|^{۲}\|\vec{b}\|^{۲}$$

$$\rightarrow(۷۲)^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=(۳)^{۲}(۲۶)^{۲}\rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=۹۰۰$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\pm۳۰\xrightarrow{\theta<۰}\vec{a}.\vec{b}=۳۰$$

۱۷ : صفر

۱۸ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=۴۵^{\circ}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۲,۲,-۱)$$ بردار عمود

۱۹ :

روش اول :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta\rightarrow۷۲=(۳)(۲۶)\sin\theta\rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱}\cos\theta=\frac{۵}{۱۳}$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=(۳)(۲۶)(\frac{۵}{۱۳})=۳۰$$

روش دوم :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\|\vec{a}\|^{۲}\|\vec{b}\|^{۲}\rightarrow(۷۲)^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=(۳)^{۲}(۲۶)^{۲}$$

$$\rightarrow۵۱۸۴+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=۹\times۶۷۶\rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=۶۰۸۴-۵۱۸۴=۹۰۰\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۳۰$$

❋❋❋

(❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۱,-۱,۱)$$

$$S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

۲:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۸,-۷,-۵)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۸)+(m)(-۷)+(-۱۱)(-۵)=۸-۷m+۵۵=۰\rightarrow m=۹$$

۳:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوّم :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\|\vec{a}\|^{۲}\|\vec{b}\|^{۲}\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}+(۱۲)^{۲}=(۴)^{۲}(۶)^{۲}$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}+۱۴۴=۱۶\times۳۶\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}+۱۴۴=۵۷۶\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}=۴۳۲$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^{۲}=۱۴۴\times۳\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\times۱۲\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$$

۴:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۲,-۴,-۱)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(۲)(۳)+(-۴)(۲)+(-۱)(۱)=۶-۸-۱=-۳$$

حجم متوازی السطوح $V=|(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}|=|-۳|=۳$

۵ : الف)

$$(\vec{a}+\vec{b})=(۱,۴,۱)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲)=(-۹,۴,-۷)$$

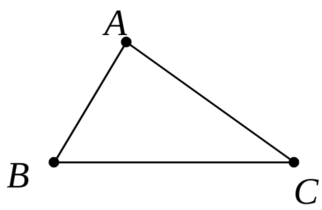
ب)

$$(\vec{b}\times\vec{c})=(-۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳)=-۱۳$$

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|-۱۳|=۱۳$$

۶ :



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۲,-۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۱,-۳,۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۵,-۳,-۴)$$

مساحت مثلث داده شده $S=\frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}$

۷ : الف :

$$\vec{a}.\vec{b}=(-۴)(۱)+(۳)(-۱)+(-۵)(۱)=-۴-۳-۵=-۱۲$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{-۱۲}{۳}(۱,-۱,۱)=-۴(۱,-۱,۱)=(-۴,۴,-۴)$$

ب : بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر مضرب غیر صفر آن ، بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. در اینجا فقط کافی است ضرب خارجی را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}۳ & -۵\\ -۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۵ & -۴\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۴ & ۳\\ ۱ & -۱\end{vmatrix})=(-۲,-۱,۱)$$

ج : مساحت مثلثی که با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل می شود، برابر نصف اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی این دو بردار است. یعنی :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۱)^{۲}}=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۸ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱)=(۲,-۱,-۴)$$

$$S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$$

۹ : الف) کافی است که بردار، ضرب خارجی دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را تعیین کنیم.

$$-۲\vec{b}=-۲(-۱,۱,۰)(۲,-۲,۰)$$

$$(-۲\vec{b})\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix})=(۴,۴,۶)$$

ب)

$$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{vmatrix})=(-۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲)(-۲)+(۳)(-۲)+(۱)(-۳)=-۴-۶-۳=-۱۳$$

$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=۱۳$ حجم متوازی السطوح

۱۰ :

$$\vec{a}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ -۲ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۳ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & -۲\end{vmatrix})=(۳,-۳,-۳)$$

$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=۰\rightarrow(۰)(۳)+(m)(-۳)+(-۱)(-۳)=۰$$

$$\rightarrow -۳m+۳=۰\rightarrow m=۱$$

❋❋❋

فصل اوّل

((هندسه ۳))

❀❀❀

درس ۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

۱	عبارت زیر را کامل کنید اگر ماتریس $\begin{bmatrix} n & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+n$ برابر با ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	ماتریس A مربعی مرتبه ۳ به صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، به صورت زیر $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ تعریف شده است، این ماتریس را با درایه هایش (آرایش مستطیلی) بنویسید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) ماتریس $A_{۳\times۴}$ دارای ۱۲ درایه است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	ماتریس مربعی I_n که آن را ماتریس واحد مرتبه‌ی n می نامیم، عضو خنثی برای عمل..... ماتریس های مربعی مرتبه‌ی n است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد، به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی توان نتیجه گرفت $B=C$ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x-۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با .... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه‌ی m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه‌ی دو است.)	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره

۸	اگـر دو مـاتریس مربعـی A و B بـه صـورت $A=[3i-2j]_{3\times 3}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشند. الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس B^2 را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۹	اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید : $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۰	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) ماتریس مربعی که تمام درایه های واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند،ماتریس قطری نامیده می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۱	اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i\times j & i>j \\ i^2 & i=j \\ i+j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد. ماتریس $3A-4I$ را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس های A^3 و $A\times B$ را با درایه هایشان مشخص کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۳	اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & m \\ n & m-2 \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.	دی ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۱۴	الـف) اگـر $b_{ij}=\begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i<j \\ 1 & i>j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times 3}$، مـاتریس B را بـه صـورت آرایـش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس B^2+3I را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه۳ است)	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۵	با استفاده از ویژگی های ضرب ماتریس ها و ماتریس همانی I درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. $(A-3I)^2=A^2-6A+9I$	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۶	مـــــاتریس هـــــای $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+2 & x+1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظـــــر بگیریـــــد. اگر $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر y و x را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۷	جای خالی را کامل کنید.	شهریور	۰/۲۵

	اگر در ماتریس قطری تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را مـاتریس ...... مـی نامند.	۱۴۰۲	نمره
۱۸	در تساوی $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$، مقدار x را بیابید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

فصل اوّل

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان و وارون ماتریس

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $\|A\|=۵$ باشد، آنگاه $\|۲A\|=۴۰$ است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.(خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۵	اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۲ \\ -۴ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\|A\|A\|\|$ را بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت عدد حقیقی m را چنان بیابید که تساوی زیر برقرار باشد. $\|A\|^۲-۵\|A\|+۶=۰$ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۲۲}=۵$، در این صورت $\|A\|$ برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۸	اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه‌ی دو است.)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره

۹	اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\|\,\|A\|A\,\|$ را بیابید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۱۰	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) الف) وارون هر ماتریس مربعی، در صورت وجود .... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} 8 & a \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۱۱	اگر $A=\begin{bmatrix} \|A\| & 2\|A\| \\ \|A\|^2 & 7 \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $\|A\|$ را بیابید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۱۲	با توجه به ماتریس $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۳	اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$، حاصل $\|-\frac{1}{2}A^4\|$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۴	ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه‌ی $k\|kA\|=625$ برقرار باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۵	در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۶	اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \|A\| \\ 1 & \|A\| & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\|A\|$ را بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۱۷	در مورد«الف»، جای خالی را کامل و در مورد «ب» درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. الف) اگر $A=\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر .... است. ب) هر ماتریس مربعی وارون پذیر است. (درست / نادرست)	شهریور ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۸	ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^2-j & i>j \\ i+j & i\leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس A^{-1} را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۹	اگر $3A=\begin{bmatrix} -5 & \|A\| \\ 4\|A\| & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\|A^{-1}\|$ را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

دستگاه معادلات خطی

۱	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۲	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۰ \\ x+۳y=۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۰ \\ ۳y+x=۵ \end{cases}$ را به روش ماتریس معکوس حل کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۵	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۹y=m+۱ \\ ۴x+my=-۴ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

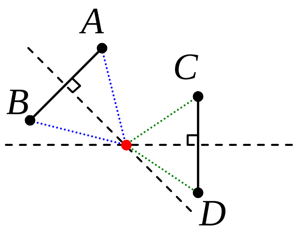
فصل دوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۱ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک هذلولی است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی گزاره زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) فصل مشترک یک صفحه و یک کره، همواره یک دایره است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	نقاط A و B و خط d در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی یک سانتی باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.) (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	جای خالی را کامل کنید. اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه-ی سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماسند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می شود. اگر صفحه‌ی P بر خط L عمود باشد. سطح مقطع صفحه‌ی P و سطح ایجاد شده بیضی است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

۱۰	در مورد الف، جای خالی را کامل کنید و در مورد ب، درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. الف : مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، .... آن زاویه است. ب : بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۱	جای خالی را کامل کنید. اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آنگاه سطح مقطع حاصل یک .... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۲	نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند، نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به فاصله باشند. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.) 	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره

فصل دوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : دایره

۱	عبارت زیر را با یکی از کلمات داخل پرانتز کامل کنید. نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ در....... دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. (خارج/ داخل)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	وضعیت خط $۳x-۴y=۱۳$ را نسبت به دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۳$ مشخص کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	الف) حدود k را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۴x+۶y+k=۰$ معادله‌ی یک دایره باشد. ب) وضعیت خط $x+y=۱$ و دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۵	حدود k را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۶x+۸y+k=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰$ مماسی بر آن رسم کرده ایم، معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	وضعیت دو دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	جای خالی را با یک عدد مناسب تکمیل کنید. مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره های با شعاع ثابت یک ، که بر دایره-ی $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$ مماس خارج باشند، دایره های به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع .... است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۹	معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x-۴y+۱۰=۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

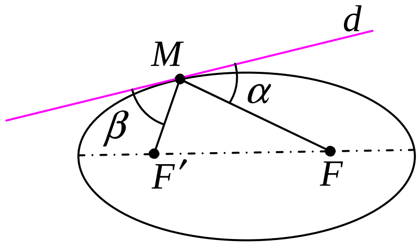
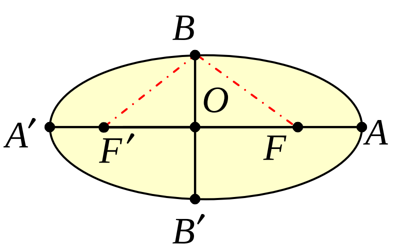
۱۰	در دایره به معادله‌ی ضمنی $x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0$ با استفاده از روش مربع کامل کردن، ثابت کنید شعاع دایره برابر $R=\frac{\sqrt{a^{2}+b^{2}-4c}}{2}$ است.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۱	معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(1,0)$ مرکز آن بوده و از خط $x=-3$ مماس باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۲	مقدار c را چنان بیابید که دایره‌ی $x^{2}+y^{2}-2x+2y+c=0$ بر دایره‌ی $(x+1)^{2}+(y-1)^{2}=2$ مماس بیرون باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره
۱۳	معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و روی خط $3x+4y+6=0$ ، وتری به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور y ها را بیابید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۴	وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^{2}+(y+2)^{2}=1$ و $x^{2}+y^{2}+6x+2y-6=0$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه‌ی راه حل)	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

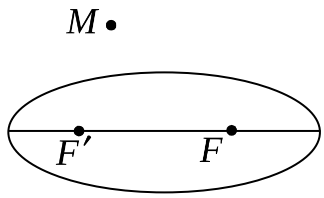
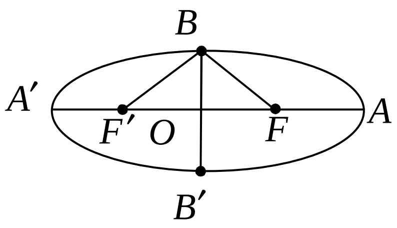
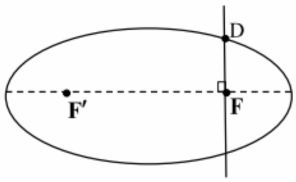
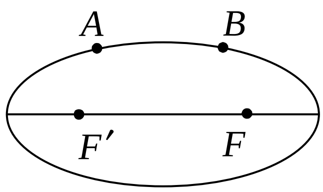
فصل دوّم

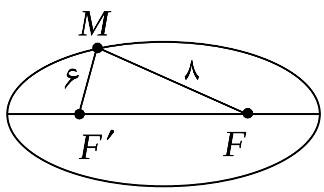
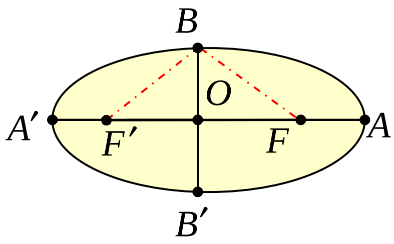
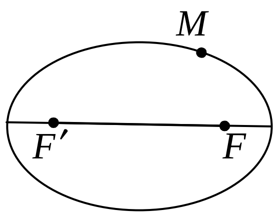
((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : بیضی

۱	عبارت زیر را کامل کنید. اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و بیـضی بـه ..... نزدیکتر می شود.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در شکل روبرو اگر خط d در نقطه‌ی M بر بیضی مماس بوده و زاویه‌ی FMF' برابر ۵۰ درجه باشد، آنگاه $\alpha=\beta=۶۰^\circ$ است. 	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۳	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است. الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون ها (F و F') و مختصات دو سر قطر بزرگ (A و A') و مختصات دو سرقطر کوچک (B و B') را به دست آورید. پ) بیضی را در دستگاه محور های مختصات رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خارج کشور) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر .... باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	در یک بیضی اندازه‌ی قطر بزرگ برابر ۲۰ و خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	اگر در بیضی زیر، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید. (خارج کشور) 	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

۷	اگر M نقطه ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید، مجموع فواصل نقطه‌ی M از کانون های F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.  	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۸	اگر در یک بیضی طول قطر بزرگ(AA') برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصله‌ی رأس A تا نزدیکترین کانون را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر شود، شکل بیضی به .... نزدیکتر می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۳}{۵}$ و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر۱۶ باشد: (خارج کشور) الف : طول قطر بزرگ بیضی را تعیین کنید. ب : فاصله‌ی کانونی را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۱	در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید. (خارج کشور)  	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	در یک بیضی مختصات کانون ها $F(۴,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه‌ی $P(۱,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۳	بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون های F و F' مطابق شکل روبرو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه‌ی D قطع کند، ثابت کنید: $DF=\frac{b^۲}{a}$  	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۴	در شکل روبرو دو نقطه‌ی A و B روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارند. اگر $AF'=BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه ای مانند M قطع کنند. نشان دهید FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.  	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

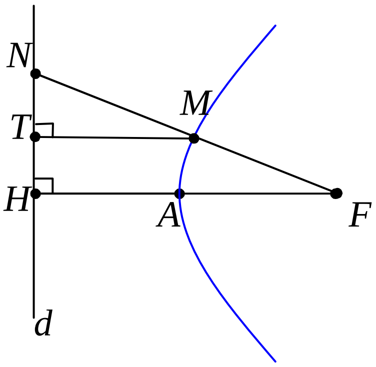
۱۵	در شکل روبرو نقطه‌ی M روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارد. به طوری که $MF=۸$ و $MF'=۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد. اندازه‌ی نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید. 	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۶	در یک بیضی با کانون های F و F' ، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را به دست آورید. 	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۷	در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه-ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF'=MF'$ 	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

فصل دوّم

((هندسه ۳))

❊❊❊

درس ۲ : سهمی

۱	سهمی به معادله‌ی $y^{۲} - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را در نظر بگیرید. الف) معادله‌ی متعارف و فاصله‌ی کانونی را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M ، پاره خط MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$ 	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۳	سهمی به معادله‌ی $y^{۲} + ۸x + ۲y + ۹ = ۰$ مفروض است. معادله‌ی استاندارد سهمی را نوشته، نوع سهمی ، مختصات رأس ، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	الف) معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۲,۳)$ رأس آن بوده و معادله‌ی خط هادی آن $x = ۳$ باشد. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید. پ) مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی با محور طول ها را حساب کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۵	معادله‌ی سهمی $x^{۲} - ۴ = ۸y + ۴x$ را به حالت استاندارد تبدیل، مختصات کانون و رأس آن را تعیین کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	معادله‌ی سهمی را بنویسید که $F(-۳,۲)$ مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی آن $x = ۱$ باشد.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۷	مختصات نقاط برخورد سهمی $y^{۲} + ۷x + ۵ = ۰$ و دایره‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۲۵$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	سهمی با رأس $A(۱,۲)$ و کانون $F(۱,-۲)$ مفروض است. معادلات سهمی و خط هادی آن را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

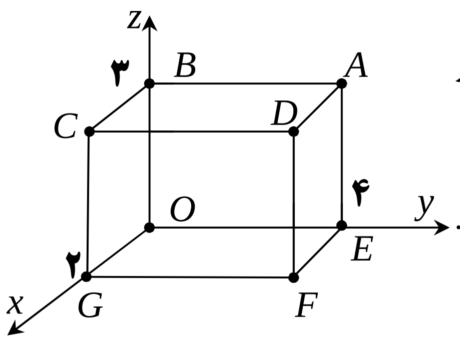
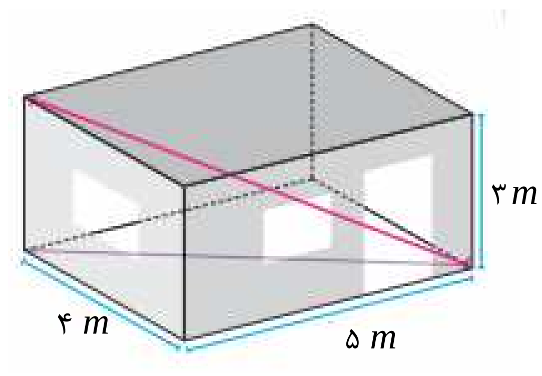
۹	اگر اندازه‌ی گودی (عمق) یک دیش مخابراتی سهمی شکل، دو برابر شود، فاصله‌ی کانونی این دیش چه تغییری می کند؟ (با ارائه‌ی راه حل)	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۰	معادله‌ی سهمی با کانون $F(۱,۲)$ و خط هادی $x=-۳$ را بنویسید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. در هر سهمی، هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره

فصل سوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۱ : فضای سه بعدی و بردار

۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه‌ی $x^۲ \leq y \leq ۲$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	با توجه به شکل مقابل، به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) نام وجهی از شکل که معادله‌ی آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید. ($x = ۲$ و $۰ \leq y \leq ۴$ و $۰ \leq z \leq ۳$) ب) معادلات مربوط به پاره خط(یال) AD را بنویسید. پ) مختصات نقطه‌ی D را بنویسید.  ت) معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که موازی با صفحه‌ی xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	در شکل مقابل ، اتاقی به طول ۵ و عرض ۴ و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر کف اتاق و طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه‌ی مقابلش چقدر است؟ (خارج کشور)  	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خارج کشور) نمودار مربوط به معادله‌ی $x = ۰$ در $R^۳$ ، تمام نقاط .... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	جای خالی را کامل کنید. در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ ، معادله‌ی محور .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه ، r عدد حقیقی و $\vec{b}=r\vec{a}$،آنگاه $\Vert\vec{b}\Vert=\vert r\vert\times\Vert\vec{a}\Vert$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه‌ی $-1<x\leq 2$ و $y=x^2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۸	طول بردار $\vec{a}=(0,-3,4)$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) نقطه‌ی $(0,0,-3)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	در مورد الف، جای خالی را کامل کنید و در مورد ب ، نمودار رسم نمایید. الف) معادله‌ی صفحه ای که بر محور z ها در نقطه‌ی $A(0,0,3)$ عمود باشد، به صورت .... است. ب) شکل کلی(نمودار) مربوط به روابط $-2<y\leq -1$ و $y<-x^2+1$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $x>-2$ و $y^2+x\leq 0$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۲	جای خالی را کامل کنید. در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$، خطی موازی محور .... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۳	نقطه‌ی A به ارتفاع ۳ روی محور z ها و نقطه‌ی $B(1,0,1)$ در فضا مفروض اند. فاصله‌ی مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۴	درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. الف) نقطه‌ی $(-2,3,-1)$ در ناحیه‌ی ششم مختصاتی قرار دارد.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره

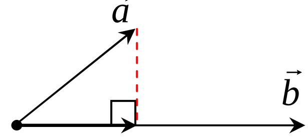
فصل سوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : ضرب داخلی دو بردار و کاربرد

۱	سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید. الف) کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}-\vec{c}$ را بدست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۲	برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بر هم عمودند،اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر $\vec{a}=۴\vec{k}-۲\vec{j}-\vec{i}$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}$ و $r=\frac{۱}{۴}$ (خارج کشور) الف) بردار $r(۳\vec{a}-\vec{b})$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را بدست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمره
۴	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ را پیدا کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۵	مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(۲,m,-۱)$ و $\vec{b}=(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۶	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $\|\vec{a}.\vec{b}\|\le\|\|\vec{a}\|\|\times\|\|\vec{b}\|\|$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردار هایی باشند که به ترتیب به طول های ۲ و ۳ و ۴ باشند. اگر این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند، طول بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ را تعیین کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۸	اگر $\vec{a}=(۲,-۶,۴)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد قائم بردار $\vec{b}$ را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\|\vec{a}\|\|\times\|\|\vec{b}\|\|$ در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ...... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

۱۱	ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید. زاویه‌ی بین بردارهای غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، برابر θ است. در کدامیک از موارد زیرحاصل ضرب داخلی آنها بیشترین مقدار را دارد؟ ۱) $\theta=۰$ ۲) $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{۳}$	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۳	نشان دهید، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ ، برداری به شکل $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\Vert\vec{b}\Vert}\vec{b}$ است.  	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۴	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۵	مقدار m را طوری بیابید که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(m,۰,۲)$ و $\vec{b}=(۲,-۲,۰)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۶	اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۱)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,۰)$ و $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر امتداد بردار $۲\vec{c}-\vec{b}$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

فصل سوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۳ : ضرب خارجی دو بردار و کاربرد

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل ضرب خارجی ($\vec{i}\times\vec{j}=\vec{o}$) برابر صفر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۶$ و $\|\vec{b}\|$ و زاویه‌ی بین دو بردار ۳۰ درجه باشد. مقدار $\|۲\vec{a}\times\vec{b}\|$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	عبارت زیر را کامل کنید. اگر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	اگر $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(-۱,۱,۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را معلوم کنید. حاصل ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر بردار صفر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۷	اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۵$ و حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می شود، چقدر است؟	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۸	حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}=(۰,۲,۲)$ و $\vec{c}=(۲,-۳,۰)$ تولید می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۹	دو بردار $\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ را در نظر بگیرید. (خارج کشور) الف) زاویه‌ی بین دو بردار را تعیین کنید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۱۰	آیا سه بردار $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{c}=(۳,۱,۲)$ در یک صفحه قرار دارند؟چرا؟ (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۱	سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید.	دی	۲

	الف) طول بردار $۲\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید. ب) مساحت متوازی الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می شود را به دست آورید.	۱۴۰۱	نمره
۱۲	متوازی السطوحی توسط برادرهای $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}$ ایجاد می شود. اگر قاعده‌ی این متوازی السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۳	بردار $\vec{a}=(۴,-۴,۲)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیر همجهت با $\vec{a}$ و به اندازه‌ی ۱۲ واحد را طوری بیابید که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۴	گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید. الف : حاصل عبارت $(\vec{i}\times\vec{j}).\vec{i}$ برابر صفر است. (درست – نادرست) ب : کدام یک از بردار های زیر، بر راستای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست؟ ۱) $\sqrt{۳}\vec{a}\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{b})$ ۲) $\vec{a}\times\vec{b}$ ۳) $۲\vec{a}+۳\vec{b}$ ۴) $\vec{b}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{a}$	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۵	جای خالی را کامل کنید. حاصل $((\vec{i}\times\vec{k})\times\vec{i}).\vec{j}$ برابر .... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۶	اگر $\vec{a}=(-۲,۰,۱)$ و $\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{j}+۳\vec{k}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-\vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می شود را حساب کنید.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۱۷	اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-۱,۱)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,m,-۱)$ در یک صفحه باشند، مقدار m را بیابید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

فصل اوّل

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

۱

می دانیم که در ماتریس همانی درایه های روی قطر اصل برابر یک و درایه های خارج قطر اصلی صـفر هـستند. لـذا در ماتریس همانی $\begin{bmatrix} n & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم $n=۱$ و $m-۱=۰$ یعنی $m=۱$ که نتیجه می شود $m+n=۲$

۲

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس قطری دایره های خارج از قطر اصلی برابر صفر می باشند، لذا :

$-۸+۲a=۰\rightarrow a=۴$ و $b-۳=۰\rightarrow b=۳$

۳

با توجه به تعریف $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ می توان به شکل زیر عمل کرد :

ستون / سطر	۱	۲	۳
۱	۱+۱=۲	۰	۰
۲	۱	۲+۲=٤	۰
۳	۱	۲	۳+۳=٦

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

۴

درست ، وقتی گفته می شود، ماتریس $A_{۳\times۴}$ ، یعنی اینکه این ماتریس دارای ۳ سطر و۴ ستون می باشد. در نتیجه این ماتریس دارای $۳\times۴=۱۲$ درایه می باشد.

۵

می دانیم که برابر هر ماتریس مربعی I_n داریم $AI=IA=A$ ، لذا در اصطلاح گفته می شود که I_n عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس های مربعی مرتبه‌ی n است.

۶

اگر $C=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

یعنی $AB=AC$. این در حالی است که $B\neq C$

۷

الف) $۲x-۱=۵\to x=۳$

ب) $m+۱=۰\to m=-۱$ و $۲n+۴=۰\to n=-۲$

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

۸

الف) ابتدا هر یک از درایه های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

$۳i-۲j$	۱	۲	۳
۱	$۳(۱)-۲(۱)=۱$	$۳(۱)-۲(۲)=-۱$	$۳(۱)-۲(۳)=-۳$
۲	$۳(۲)-۲(۱)=۴$	$۳(۲)-۲(۲)=۲$	$۳(۲)-۲(۳)=۰$
۳	$۳(۳)-۲(۱)=۷$	$۳(۳)-۲(۲)=۵$	$۳(۳)-۲(۳)=۳$

$$\to A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

ب)

$$B^{۲}=B\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۶\\ -۳ & ۷ & ۶\\ -۲ & ۲ & ۷\end{bmatrix}$$

۹

$$(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-AB-BA+B^{۲}\overset{AB=BA}{=}A^{۲}-۲AB+B^{۲}$$

۱۰

نادرست، در ماتریس قطری تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن برابر صفر می باشند.

۱۱

ابتدا هر یک از درایه های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

	۱	۲	۳
۱	$(۱)^{۲}=۱$	$(۲)(۱)=۲$	$(۳)(۱)=۳$
۲	$(۱)+(۲)=۳$	$(۲)^{۲}=۴$	$(۳)(۲)=۶$
۳	$(۱)+(۳)=۴$	$(۲)+(۳)=۵$	$(۳)^{۲}=۹$

$$\to A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۴ & ۶\\ ۴ & ۵ & ۹\end{bmatrix}$$

$$3A-4I=3\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&6\\4&5&9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&6&9\\9&8&18\\12&15&23\end{bmatrix}$$

۱۲

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\rightarrow A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&9&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&9&0\\0&0&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&27&0\\0&0&-8\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&-2\\-1&3&0\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\-3&9&0\\-4&-2&0\end{bmatrix}$$

۱۳

$$m-2=0\rightarrow m=2\xrightarrow{m=n}n=2$$

۱۴

الف : ابتدا هر یک از درایه ها را تعیین می کنیم.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	۲	۰	۱
$i=2$	۱	۳	۱
$i=3$	۱	۱	۴

$$\rightarrow B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}$$

ب :

$$B^2=B\times B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1&6\\6&10&8\\7&7&18\end{bmatrix}$$

$$B^2+3I=\begin{bmatrix}5&1&6\\6&10&8\\7&7&18\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1&6\\6&12&8\\7&7&20\end{bmatrix}$$

۱۵

$$(A-3I)^2=(A-3I)(A-3I)=A^2-3AI-3IA+9I^2$$
$$=A^2-3A-3A+9I=A^2-6A+9I$$

توجه کنید که $IA=AI=A$ و $I^2=I$

۱۶	$A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x+۱ & y+۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix}$ $\to \begin{cases} ۲+(x+۱)=۵ \to x=۲ \\ ۳+(y+۲)=۴ \to y=-۱ \end{cases}$
۱۷	اسکالر
۱۸	ابتدا ماتریس های سمت چپ معادله را ضرب می کنیم. $\begin{bmatrix} x-۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \to x^{۲}-۲x-۳=۰ \to x=-۱ \ , \ x=۳$

فصل اوّل

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان و وارون ماتریس

۱	درست : بنابر ویژگی های دترمینان می توان نوشت: $\lvert ۲A\rvert=۲^{۳}\lvert A\rvert=۸\times۵=۴۰$
۲	برای محاسبه دترمینان، چون در صورت سؤال اشاره ای به روش خاصی نشده است، می توان به دلخواه عمل کرد. در اینجا از روش ساروس استفاده می کنیم. $\begin{bmatrix}۲&۱&۰\\-۱&۳&۲\\۲&۰&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۰\\-۱&۳&۲\\۲&۰&۵\end{bmatrix}$ $\rightarrow\lvert B\rvert=(۳۰+۴+۰)-(۰-۵+۰)=۳۴+۵=۳۹$
۳	می دانیم که دو ماتریس B و A وارون همدیگرند، هرگاه $A\times B=B\times A=I$ در اینجا چون $A\times B=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۱\\۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix}$ و چون حاصل ضرب ماتریس همانی نشد، پس دو ماتریس وارون یکدیگر نیستند و لذا عبارت داده شده نادرست است.
۴	کافی است ماتریس را دو بار کنار هم بنویسیم و سپس دستور ساروس را بکار بگیریم. $\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۱&۲&۳\\-۱&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۱&۲&۳\\-۱&۲&۱\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=(۲-۶-۲)-(-۲-۲-۶)=۴$
۵	ابتدا $\lvert A\rvert$ را به روش دلخواه محاسبه می کنیم. در اینجا از روش بسط نسبت به سطر اول استفاده می کنیم. $\lvert A\rvert=(-۱)(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}۲&-۲\\-۴&۱\end{vmatrix}=(-۱)(۱)(۲+۸)=-۱۰$ ماتریس A یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ است و به کمک ویژگی های دترمینان می توان نوشت: $\lvert\lvert A\rvert A\rvert=\lvert A\rvert^{۳}\lvert A\rvert=(-۱۰)^{۳}(-۱۰)=(-۱۰۰۰)(-۱۰)=۱۰۰۰۰$

۶

ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to |A|=(2)(3)-(1)(m)=6-m$$

$$|A|^2-5|A|+6=0 \to (6-m)^2-5(6-m)+6=0$$

$$\to 36-12m+m^2-30+5m+6=0 \to m^2-7m+12=0$$

$$\to (m-3)(m-4)=0 \to m=3 \quad , \quad m=4$$

۷

می دانیم که ماتریس اسکالر، یک ماتریس قطری است که در آن تمام درایه های روی قطر اصلی برابر می باشند. در اینجا چون $a_{22}=5$ و این درایه روی قطر اصلی قرار دارد، لذا تمام درایه های روی قطر اصلی ماتریس A برابر ۵ می باشند. از طرفی ماتریس A یک ماتریس قطری است و دترمینان ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است. پس :

$$|A|=5\times 5\times 5=125$$

۸

$$A-2I=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A-2I|=(2)(1)-(1)(0)=2$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}(A-2I)^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۹

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to |A|=1(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=2$$

$$||A|A|=|2A|=2^3|A|=8\times 2=16$$

۱۰

الف) منحصر به فرد

ب) چون ماتریس داده شده وارون پذیر نیست. پس :

$$|A|=0 \to (-6)(a)-(8)(-3)=0 \to -6a=-24 \to a=4$$

۱۱

فرض کنیم که $|A|=d$ در این صورت :

$$A=\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 7 & |A|^2 \end{bmatrix} \to |A|=\begin{vmatrix} 2|A| & |A| \\ 7 & |A|^2 \end{vmatrix} \to d=\begin{vmatrix} 2d & d \\ 7 & d^2 \end{vmatrix} \to d=2d^3-7d$$

$$\to 2d^3-8d=0 \to 2d(d^2-4)=0 \to d=0 \ , \ d=2 \quad , \quad d=-2$$

۱۲

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{5}} \frac{1}{5}A^{-1}=(\frac{1}{5})(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$5A=\begin{bmatrix}15 & -5\\ 5 & -5\end{bmatrix}\to (5A)^{-1}=\frac{1}{|5A|}(5A)^{*}=-\frac{1}{50}\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -5 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

۱۳

$$|A|=1(-1)^{1+1}\begin{bmatrix}6 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}+1(-1)^{1+3}\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\to |A|=14-4-8=2$$

$$\left|-\frac{1}{2}A^{4}\right|=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}|A|^{4}=\left(-\frac{1}{8}\right)(-2)^{4}=-2$$

۱۴

ابتدا دترمینان ماتریس A را تشکیل می دهیم و سپس در تساوی داده شده جایگزین می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to |A|=1$$

$$k|kA|=k(k^{3}|A|)=k^{4}|A|=k^{4}\times 1=k^{4}$$

$$k^{4}=625\to k=\pm 5$$

۱۵

قرار می دهیم $C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}$. پس $BA=C$

برای تعیین ماتریس A در ابتدا معکوس ماتریس B را محاسبه می کنیم.

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^{*}=\frac{1}{(5)(3)-(2)(7)}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-1}C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 4\\ 17 & -9\end{bmatrix}$$

۱۶

قرار می دهیم $|A|=d$ پس

$$A=\begin{bmatrix}d & 0 & 1\\ 1 & d & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\to |A|=\begin{vmatrix}d & 0 & 1\\ 1 & d & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$\to d=d(d-2)-0(1-0)+1(2-0)$$

$$\to d=d^{2}-2d+2\to d^{2}-3d+2=0\to d=1\ ,\quad d=2$$

۱۷

الف) ۱-

$$A=\begin{bmatrix}-\sin x & \cos x\\ \cos x & \sin x\end{bmatrix}\to |A|=(-\sin x)(\sin x)+(\cos x)(\cos x)$$

$$\to |A| = -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

ب) نادرست، هر ماتریس مربعی که دترمینان آن غیر صفر باشد، وارون پذیر است.

۱۸

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to |A| = (2)(4) - (3)(3) = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

۱۹

فرض کنیم که $|A| = d$ باشد. در این صورت :

$$|3A| = \begin{vmatrix} |A| & -5 \\ 1 & 4|A| \end{vmatrix} \to 3^2 |A| = \begin{vmatrix} |A| & -5 \\ 1 & 4|A| \end{vmatrix} \to 9d = \begin{vmatrix} d & -5 \\ 1 & 4d \end{vmatrix}$$

$$\to 9d = (d)(4d) - (-5)(1)$$

$$\to 4d^2 - 9d + 5 = 0 \to \frac{1}{4}(2d - 4)(2d - 5) = 0 \to \begin{cases} d = 2 \to |A^{-1}| = 1 \\ d = \frac{5}{4} \to |A^{-1}| = \frac{4}{5} \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی

۱

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases} \to A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \to |A| = (2)(4) - (1)(7) = 8 - 7 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} D \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

۲

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \to A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to |A| = (2)(3) - (1)(1) = 6 - 1 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} D \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

۳

نادرست

۴

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3y + x = 5 \end{cases} \to A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

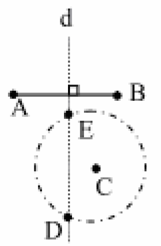
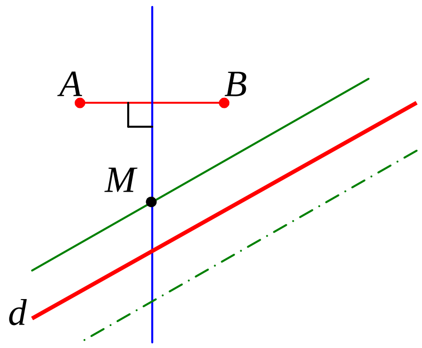
$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|=(۲)(۳)-(۱)(۱)=۵$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\|A\|}A^{*}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} -۵ \\ ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=-۲ \end{cases}$	
یک دستگاه دو معادله‌ی ، دو مجهولی وقتی دارای جواب نیست که دترمینان ضرایب آن صفر باشد. $\begin{vmatrix} m & ۹ \\ ۴ & m \end{vmatrix}=۰ \rightarrow m^{۲}-۳۶=۰ \rightarrow m=\pm ۶$ و چون هر دو جواب در نامساوی $\frac{m}{۴}=\frac{۹}{m}\neq\frac{m+۱}{-۴}$ صدق می کنند، پس هر دو جواب، قابل قبولند.	**۵**

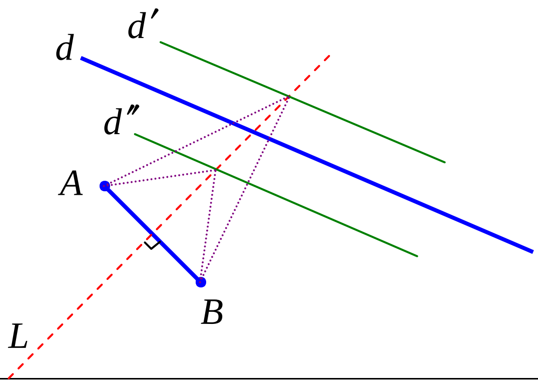
فصل دوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۱ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۱	درست : بنابر تعریف مقاطع مخروطی، سطح مخروطی حاصل یک هذلولی است.
۲	مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی ۳ واحد باشند. دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف (d) و دایره جواب مسأله است.(نقاط D و E) الف) اگر خط عمود منصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسأله دو جواب دارد. ب) اگر مماس شوند، مسأله یک جواب دارد. پ) در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد. 
۳	در حالتی که صفحه بر کره مماس باشد، فصل مشترک صفحه و کره ، یک نقطه است. لذا این عبارت نادرست است.
۴	ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم. سپس خطی موازی خط d و به فاصله‌ی یک سانتی از آن رسم می کنیم. محل تقاطع عمود منصف AB با این خط جواب مسأله است. چون دو خط در دو طرف خط d به فاصله‌ی یک سانتی متر از آن می توان رسم کرد، لذا مسأله جواب دیگری دارد. اگر AB عمود بر d باشد، چون در این حالت عمود منصف AB، خط d را قطع نمی کند، مسأله جواب ندارد و اگر عمود منصف AB، منطبق بر خط d باشد، مسأله دو جواب دارد. 
۵	بیضی
۶	درست
۷	مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را L می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر هستند دو خط d' و d'' می باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط L جواب مسأله است. الف) اگر خط L دو خط d' و d'' را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

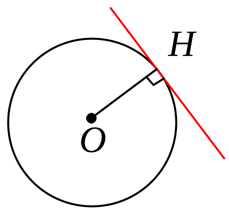
	ب) اگر خط L بر دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسأله بی شمار جواب دارد. ج) اگر خط L هیچ یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند، مسأله جواب ندارد. 
۸	درست
۹	نادرست
۱۰	الف : نیمساز ب : نادرست. این تعریف سهمی می باشد و نه بیضی
۱۱	مقطع مخروطی حاصل با این شرایط یک **بیضی** است.
۱۲	مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف پاره خط AB است. مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله اند، عمودمنصف پاره خط CD است. محل برخورد دو عمود منصف، جواب مسأله است. بستگی به حالت های دو پاره خط AB و CD، مسأله ممکن این یک جواب، بدون جواب ، یا بی شمار جواب داشته باشد.

فصل دوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : دایره

۱	اگر مختصات نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ را در عبارت $x^۲+y^۲-۲x+۲y$ جایگزین کنیم، بدست می آید، $(۱)^۲+(-۲)^۲-۲(۱)+۲(-۲)=۱+۴-۲-۴=-۱$ و چون حاصل منفی شد، نتیجه می شود که نقطه داخل دایره است. توجه داشته باشید که اگر ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را به دست آورده و با فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مقایسه کنیم، همین نتیجه بدست می آید.
۲	فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است. $R=OH=\dfrac{\|a\alpha+b\beta+c\|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\dfrac{\|۳(۱)-۴(-۱)+۳\|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\dfrac{۱۰}{۵}=۲$  لذا معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نیز نوشت: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ $\rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$
۳	کافی است که فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده $(d: ۳x-۴y-۱۳=۰)$ را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲-۲x=۳ \rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲=۲$ $\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۰)^۲=۲$ $R=\sqrt{۲}$ اندازه‌ی شعاع دایره $O(۱,۰)$ مختصات مرکز دایره فاصله مرکز دایره تا خط d $\quad OH=\dfrac{\|a\alpha+b\beta+c\|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\dfrac{\|۳(۱)-۴(۰)-۱۳\|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\dfrac{\|-۱۰\|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\dfrac{۱۰}{۵}=۲$ اکنون چون $OH>R$ ، پس خط داده شده، دایره را قطع نمی کند.
۴	الف) $a^۲+b^۲>۴c \rightarrow ۱۶+۳۶>۴k \rightarrow k<۱۳$

ب) کافی است فاصله‌ی خط داده شده، تا مرکز دایره را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره ، مقایسه کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰ \rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۴$$

$$\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴ \rightarrow \begin{cases} O(۱,۱) \\ R=۲ \end{cases}$$

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|(۱)(۱)+(۱)(۱)+(-۱)|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$\Rightarrow d<R$ خط و دایره متقاطع هستند.

۵

$$a^۲+b^۲>۴c \rightarrow ۳۶+۶۴>۴k \rightarrow k<۲۵$$

۶

اگر مختصات نقطه‌ی $A(۲,۳)$ را در معادله‌ی دایره جایگزین کنیم. معلوم می شود که مختصات این نقطه در معادله‌ی داده شده صدق می کنند. این یعنی اینکه نقطه روی دایره واقع است. پس معادله‌ی خط مماس را می توان بدین شکل نوشت:

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰ \rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۵$$

$$\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵ \rightarrow (x-۱)(x-۱)+(y-۱)(y-۱)=۵$$

معادله‌ی خط مماس

$$(۲-۱)(x-۱)+(۳-۱)(y-۱)=۵ \rightarrow x-۱+۲y-۲=۵ \rightarrow x+۲y=۸$$

۷

کافی است طول خط المرکزین را با مجموع یا تفاضل اندازه‌ی شعاع های دو دایره مقایسه کنیم.

$$x^۲+y^۲=۴ \rightarrow \begin{cases} O_۱(۰,۰) \\ R_۱=۲ \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲-۲x=۴ \rightarrow \begin{cases} O_۲(۱,۰) \\ R_۲=\sqrt{۵} \end{cases}$$

$d=O_۱O_۲=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۰-۰)^۲}=۱$ طول خط المرکزین

$$\left.\begin{matrix} R_۲+R_۱=۲+\sqrt{۵} \\ R_۲-R_۱=\sqrt{۵}-۲ \end{matrix}\right\} \rightarrow R_۲-R_۱<d<R_۲+R_۱$$

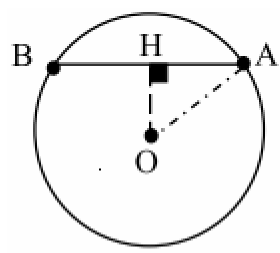
لذا دو دایره متقاطع هستند.

۸

۵ ، در واقع این دایره باید شعاعی به اندازه‌ی $R_۱+R_۲$ داشته باشد. حال چون $R_۱=۱$ و $R_۲=\sqrt{۱۶}=۴$ پس $R_۱+R_۲=۱+۴=۵$

۹

می دانیم که خط گذرا بر مرکز دایره و عمود بر یک وتر از دایره، آن وتر را نصف می کند.



$$AH=\frac{1}{2}AB=3$$

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(2)+(-4)(-1)+(10)|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

$$OA^2=OH^2+AH^2\to R^2=(4)^2+(3)^2=25$$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\to(x-2)^2+(y+1)^2=25$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

۱۰

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\to x^2+ax+(\frac{a}{2})^2+y^2+by+(\frac{b}{2})^2=-c+(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2$$

$$\to(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{-4c+a^2+b^2}{4}$$

$$\to R^2=\frac{-4c+a^2+b^2}{4}\to R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

۱۱

می دانیم فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس برابر اندازه‌ی شعاع دایره است. پس :

$$x=-3\to 1x+0y+3=0$$

$$R=OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1(1)+0(0)+3|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}}=\frac{4}{1}=4$$

و در نهایت معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\to(x-1)^2+(y-0)^2=16$$

توجه : اگر مختصات مرکز دایره را در صفحه تعیین و سپس نمودار خط داده شده را رسم کنیم، به سادگی معلوم می شود که فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده برابر ۴ واحد می باشد.

۱۲

ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع هر دو دایره را تعیین می کنیم.

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2\Rightarrow O(-1,1)\quad,\quad R=\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2-2x+2y+c=0\to O'(1,-1)\quad,\quad R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-4c}=\sqrt{2-c}$$

اکنون اندازه‌ی خط المرکزین را تعیین می کنیم.

$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس :

$$OO'=R+R'$$

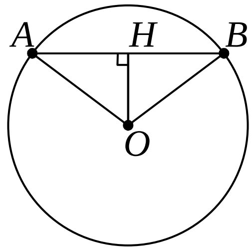
و لذا :

$$\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{2-c} \to 2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2-c}$$

$$\to \sqrt{2}=\sqrt{2-c} \to 2=2-c \to c=0$$

۱۳

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(3)(0)+(4)(1)+(6)|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$



$$AB=2\sqrt{5} \Rightarrow AH=\sqrt{5}$$

$$\Delta(AOH): OA^2=AH^2+OH^2$$

$$\to R^2=(\sqrt{5})^2+(2)^2 \to R=3$$

و لذا معادله‌ی دایره‌ی مطلوب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \to (x-0)^2+(y-1)^2=3^2$$

$$\to x^2+(y-1)^2=9$$

برای تعیین نقاط تقاطع دایره با محور عرض ها، مقدار x را برابر صفر قرار می دهیم.

$$x^2+(y-1)^2=9 \xrightarrow{x=0} (y-1)^2=9 \to y-1=\pm 3$$

$$\to \begin{cases} y=4 \\ y=-2 \end{cases}$$

پس نقاط $(0,4)$ و $(0,-2)$ ، نقاط تقاطع دایره با محور عرض ها می باشند.

۱۴

برای تعیین وضعیت دو دایره، کافی است اندازه‌ی شعاع های دو دایره را در ابتدا تعیین کنیم و با طول خط المرکزین مقایسه نماییم.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1 \to O_1(1,-2)\ ,\quad R_1=1$$

$$x^2+y^2+6x+2y-6=0 \to \begin{cases} O_2(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-3,-1) \\ R_2=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4+24}=4 \end{cases}$$

$$d=O_1O_2=\sqrt{(-3-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

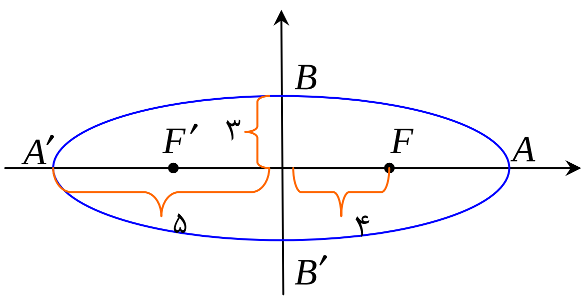
و چون $3<\sqrt{17}<5$، پس دو دایره متقاطع هستند.

فصل دوّم

((هندسه ۳))

❁❁❁

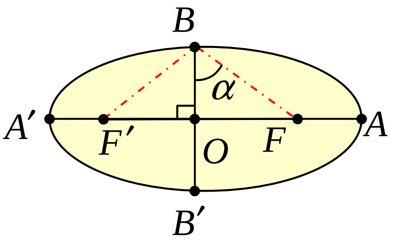
درس ۲ : بیضی

۱	بنابر مفهوم خروج از مرکز بیضی، در این حالت بیضی به دایره نزدیکتر می شود.
۲	نادرست : زیرا $\angle\alpha+\angle\beta+\angle(F'MF)=۱۸۰ \xrightarrow{\angle\alpha=\angle\beta} ۲\alpha+۵۰=۱۸۰$ $\rightarrow ۲\alpha=۱۳۰ \rightarrow \alpha=۶۵^\circ$
۳	می دانیم که $AA'=۲a$ و $BB'=۲b$ پس : $۲a=۱۰ \rightarrow a=۵$ $۲b=۶ \rightarrow b=۳$ $a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۲۵=۹+c^۲ \rightarrow c^۲=۱۶ \rightarrow c=۴$ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$ خروج از مرکز بیضی $\begin{cases} A(۵,۰) \\ A'(-۵,۰) \end{cases}$ مختصات رئوس واقع روی قطر بزرگ $\begin{cases} F(۴,۰) \\ F'(-۴,۰) \end{cases}$ مختصات کانون ها $\begin{cases} B(۰,۳) \\ B'(۰,-۳) \end{cases}$ مختصات رئوس واقع روی قطر کوچک 
۴	در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. توجه : داشته باشید که در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.
۵	$AA'=۲a=۲۰ \rightarrow a=۱۰$ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵} \xrightarrow{a=۱۰} \frac{c}{۱۰}=\frac{۴}{۵} \rightarrow c=۸$ $a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۱۰۰=b^۲+۶۴ \rightarrow b^۲=۳۶ \rightarrow b=۶$ $BB'=۲b=۲(۶)=۱۲$ طول قطر کوچک $FF'=۲c=۲(۸)=۱۶$ طول فاصله‌ی کانونی

۶

بنابر اطلاعات مسأله می توان نوشت :

$AA' = 2BB' \to 2a = 2(2b) \to a = 2b$



از طرفی مثلث FBF' متساوی الساقین است، پس $BF' = BF$

و چون نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، لذا

$BF + BF' = 2a \to 2BF = 2a \to BF = a$

مثلث FBO مثلث قائم الزاویه است. پس :

$$\cos\alpha = \frac{OB}{BF} \to \cos\alpha = \frac{b}{a} \to \cos\alpha = \frac{b}{2b} \to \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

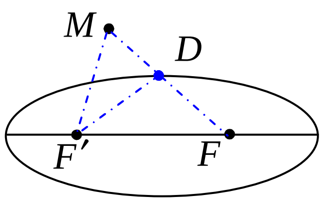
در نتیجه $\alpha = 60^\circ$. حال چون BB' میانه‌ی وارده بر قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین FBF' است. پس نیمساز زاویه-ی رأس نیز می باشد. در نهایت می توان نوشت:

$\angle FBF' = 2\alpha = 2(60) = 120^\circ$

۷

از نقطه‌ی M به کانون های بیضی وصل می کنیم تا بیضی را در نقطه‌ی D قطع کند. نقطه‌ی D روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی: $DF + DF' = 2a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF} DF + MD + MF' > DF + DF'$$

$$\to MF + MF' > 2a$$

۸

$$e = \frac{3}{4} \to \frac{c}{a} = \frac{3}{4} \xrightarrow{2a=16 \to a=8} \frac{c}{8} = \frac{3}{4} \to c = 6$$

$AF = a - c = 8 - 6 = 2$

۹

در این حالت شکل بیضی به دایره نزدیکتر می شود.

۱۰

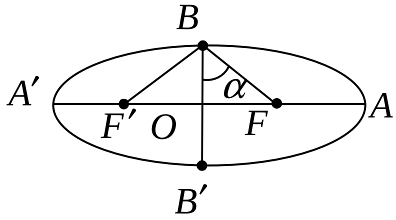
$$e = \frac{3}{5} \to \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \to c = \frac{3}{5}a$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \xrightarrow{2b=16 \to b=8} 64 + (\frac{3}{5}a)^2 = a^2 \to 64 + \frac{9}{25}a^2 = a^2$$

$$\to \frac{16}{25}a^2 = 64 \to a^2 = 64 \times \frac{25}{16} = 100 \to a = 10 \to AA' = 2a = 20$$

$$c = \frac{3}{5}a = \frac{3}{5}(10) = 6 \to FF' = 2c = 12$$

۱۱



$$AA' = ۲BB' \to a = ۲b$$

$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF = BF'} ۲BF = ۲a \to BF = a$$

$$\cos\alpha = \frac{BO}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \to \alpha = ۶۰^\circ$$

$$\to \angle FBF' = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ$$

۱۲

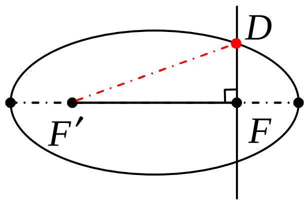
$$MF = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۰-m)^۲} = \sqrt{۹ + m^۲}$$

$$MF' = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (۰-m)^۲} = \sqrt{۹ + m^۲}$$

$$PF + PF' = ۲a \to \sqrt{۹+m^۲} + \sqrt{۹+m^۲} = ۱۰ \to m = \pm ۴$$

۱۳

نقطه‌ی D روی بیضی قرار دارد. پس بنا به تعریف بیضی $DF + DF' = ۲a$ است. از طرفی مثلث DFF' قائم الزاویه است. پس :



$$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \xrightarrow{DF' = ۲a - DF} DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$$

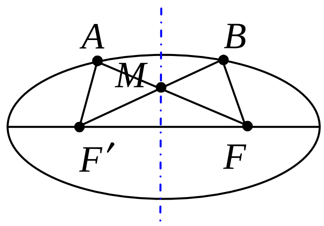
$$\to DF^۲ + ۴c^۲ = ۴a^۲ - ۴a.DF + DF^۲$$

$$\to ۴c^۲ = ۴a^۲ - ۴a.DF \xrightarrow{\div ۴} c^۲ = a^۲ - a.DF \to a.DF = a^۲ - c^۲$$

$$\xrightarrow{a^۲ - c^۲ = b^۲} a.DF = b^۲ \to DF = \frac{b^۲}{a}$$

۱۴

چون دو نقطه‌ی A و B روی بیضی قرار ارند، پس :



$$\left.\begin{array}{l} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \end{array}\right\} \to AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF} AF = BF'$$

و از اینجا نتیجه می شود که چون ($FF' = FF'$ و $AF' = BF$ و $AF = BF'$)، لذا دو مثلث AFF' و BFF' به حالت برابر سه ضلع همنهشت هستند. در نتیجه $\angle AFF' = \angle BF'F$. این یعنی مثلث MFF' متساوی الساقین است و $MF = MF'$ ، پس نقطه‌ی M روی عمود منصف پاه خط AFF' (قطر کوچک بیضی) است.

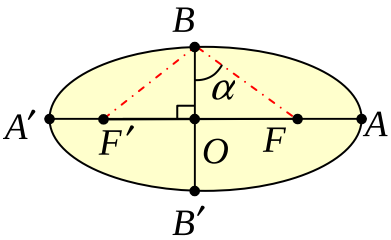
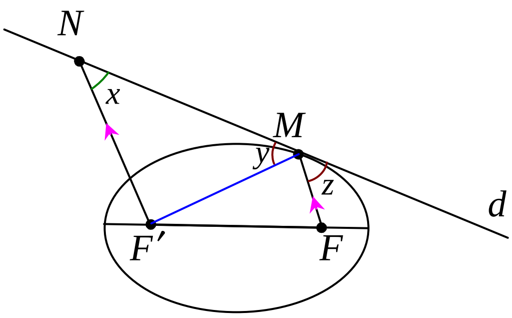
۱۵

نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. پس بنا به تعریف بیضی داریم:

$$MF + MF' = ۲a \to ۸ + ۶ = ۲a \to a = ۷$$

$$e = \frac{۱}{۷} \to \frac{c}{a} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{a = ۷} c = ۱$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۴۹ = ۱ + b^۲ \to b = ۴\sqrt{۳}$$

۱۶	بنابر اطلاعات مسأله می توان نوشت : $AA' = ۲BB' \to ۲a = ۲(۲b) \to a = ۲b$ از طرفی مثلث FBF' متساوی الساقین است، پس $BF' = BF$ و چون نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، لذا  $BF + BF' = ۲a \to ۲BF = ۲a \to BF = a$ مثلث FBO مثلث قائم الزاویه است. پس : $\cos\alpha = \frac{OB}{BF} \to \cos\alpha = \frac{b}{a} \to \cos\alpha = \frac{b}{۲b} \to \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه $\alpha = ۶۰^\circ$. حال چون BB' میانه‌ی وارده بر قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین FBF' است. پس نیمساز زاویه-ی رأس نیز می باشد. در نهایت می توان نوشت: $\angle FBF' = ۲\alpha = ۲(۶۰) = ۱۲۰^\circ$ **توجه :** برای حل مسأله می توان از تانژانت زاویه‌ی FBO نیز استفاده کرد.
۱۷	طبق ویژگی خط مماس بر بیضی داریم، $\angle y = \angle z$ و چون $NF' \parallel MF$ پس $\angle x = \angle z$. لذا $\angle x = \angle y$ یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF' = MF'$ 

فصل دوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : سهمی

۱

ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل زیر می نویسیم.

$$y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰ \rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = ۸x - ۸ \rightarrow (y-۱)^۲ = ۸(x-۱)$$

لذا با مقایسه با معادله ی استاندارد $(y+\beta)^۲ = ۴p(x+\alpha)$ معلوم می شود که سهمی افقی روبه راست است. پس می توان نوشت:

$۴p = ۸ \rightarrow p = ۲$ پارامتر سهمی

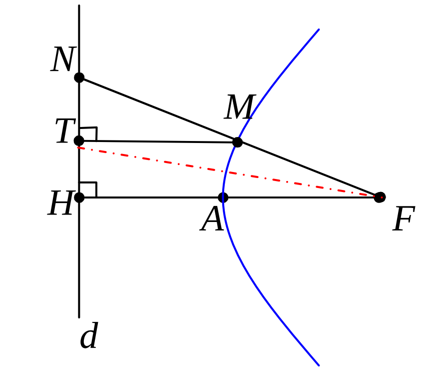
$۲p = ۲(۲) = ۴$ فاصله‌ی کانونی

$S(۱,۱)$ مختصات رأس سهمی

$x = -۱$ معادله‌ی خط هادی

$F(۳,۱)$ مختصات کانون

۲



بنابر تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است. از اینجا نتیجه می شود که :

$$\angle MTF = \angle MFT$$

از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می باشد. پس بنا به قضیه‌ی خطوط موازی:

$$\angle MTF = \angle TFH$$

از این دو نتیجه معلوم می شود که TF نیمساز زاویه‌ی NFH می باشد.

اکنون بنابر قضیه‌ی نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{NT} = \frac{FH}{TH} \rightarrow \frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\div ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

۳

$$y^۲ + ۸x + ۲y + ۹ = ۰ \rightarrow y^۲ + ۲y + ۱ = -۸x - ۸ \rightarrow (y+۱)^۲ = -۸(x+۱)$$

با مقایسه با معادله‌ی استاندارد $(y+\beta)^۲ = -۴p(x+\alpha)$ معلوم است که سهمی افقی و رو به سمت چپ محور طول ها است. لذا :

$-۴p = -۸ \rightarrow p = ۲$ پارامتر سهمی

$S(-۱,-۱)$ مختصات رأس سهمی

<table>
<tr><td>

$F(\alpha - p,\beta) \to F(-1-2,-1) \to F(-3,-1)$ مختصات کانون سهمی
$y=\alpha+p \to y=-1+2 \to y=1$ معادله خط هادی

</td><td></td></tr>
<tr><td>

الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله‌ی خط هادی، به سادگی معلوم می شود که سهمی افقی و دهانه‌ی آن به سمت چپ می باشد. در این سهمی $p=1$ و معادله‌ی آن برابر است با :

$$(y-3)^2=-4(x-2)$$

ب) مختصات کانون سهمی

$F(-p+h,k)=(-1+2,3)=(1,3)$

پ) مختصات محل برخورد با محور طول ها برابر است با :

$y=0 \to x=-\frac{1}{4} \Rightarrow (-\frac{1}{4},0)$

</td><td>۴</td></tr>
<tr><td>

$x^2-4=8y+4x \to x^2-4x+4=8y+8 \to (x-2)^2=8(y+1)$

با مشاهده‌ی معادله‌ی سهمی معلوم می شود که سهمی قائم رو به بالا است.

$4p=8 \to p=2$ پارامتر سهمی
$S(\alpha,\beta) \to S(2,-1)$ رأس سهمی
$F(\alpha,\beta+p) \to F(2,-1+2) \to F(2,1)$ مختصات کانون

</td><td>۵</td></tr>
<tr><td>

با توجه به جایگاه کانون و معادله ی خط هادی، سهمی افقی رو به سمت چپ می باشد. مختصات رأس سهمی $A(-1,2)$، در این سهمی $p=AF=2$. لذا معادله‌ی آن می شود: $(y-2)^2=-8(x+1)$

</td><td>۶</td></tr>
<tr><td>

$\begin{cases} y^2+7x+5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \to x^2+(-7x-5)=25 \to x^2-7x-30=0$

$\to (x+3)(x-10)=0$

$\to \begin{cases} x=-3 \to y^2=16 \to y=\pm 4 \Rightarrow A(-3,4)\ ,\ B(-3,-4) \\ x=10 \to y^2=-75 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

</td><td>۷</td></tr>
<tr><td>

با توجه به جایگاه کانون و معادله‌ی خط هادی، سهمی قائم رو به سمت پایین می باشد. مختصات رأس سهمی $A(1,2)$،

در این سهمی $p=AF=4$.لذا معادله‌ی آن می شود:

$(x-\alpha)^2=-4p(y-\beta) \to (x-1)^2=-16(y-2)$

و همچنین خط هادی سهمی $y=6$ است.

</td><td>۸</td></tr>
<tr><td>

می دانیم که اگر دهانه‌ی دیش $2b$ و عمق دیش h باشد، داریم :

$p=\frac{b^2}{4h}$

اکنون با توجه صورت مسأله می توان نوشت: $b'=b$ و $h'=2h$ و لذا

</td><td>۹</td></tr>
</table>

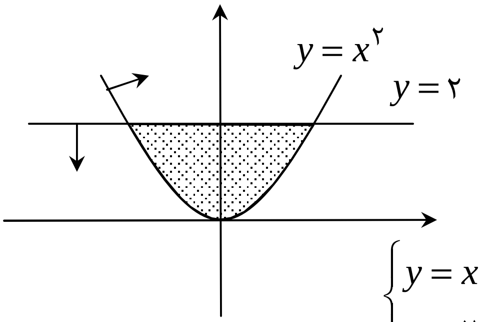
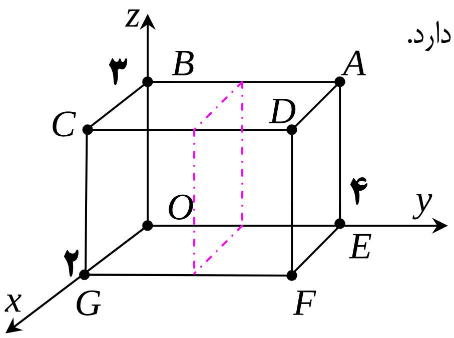
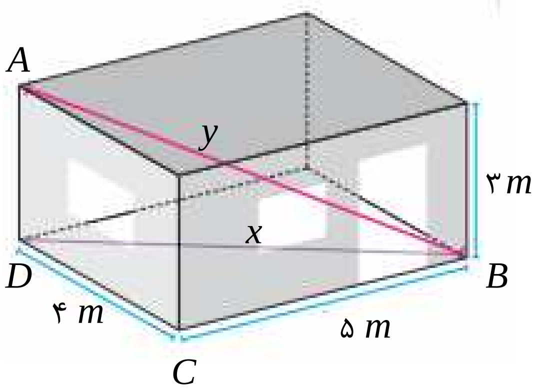
	$\frac{p'}{p}=\frac{\frac{b'^{۲}}{۴h'}}{\frac{b^{۲}}{۴h}}=\frac{\frac{b^{۲}}{۴(۲h)}}{\frac{b^{۲}}{۴h}}=\frac{۴h}{۸h}=\frac{۱}{۲}$ فاصله‌ی کانونی این دیش، نصف می شود.
۱۰	با در نظر گرفتن موقعیت نقطه، نسبت به خط هادی و اینکه کانون سهمی، درون سهمی است، نتیجه می شود که، سهمی افقی رو به راست می باشد. پس : کانون سهمی $F(\alpha+p,\beta)=F(۱,۲)\rightarrow\begin{cases}\alpha+p=۱\\ \beta=۲\end{cases}$ خط هادی سهمی $\begin{cases}x=\alpha-p\\ x=-۳\end{cases}\rightarrow\alpha-p=-۳$ $\rightarrow\begin{cases}\alpha+p=۱\\ \alpha-p=-۳\end{cases}\rightarrow\alpha=-۱\ ,\quad p=۲$ و لذا معادله‌ی سهمی مورد نظر بدین شکل خواهد شد. $(y-\beta)^{۲}=۴p(x-\alpha)\rightarrow(y-۲)^{۲}=۸(x+۱)$
۱۱	طبق ویژگی بازتابندگی بیضی، این گزاره **درست** است.

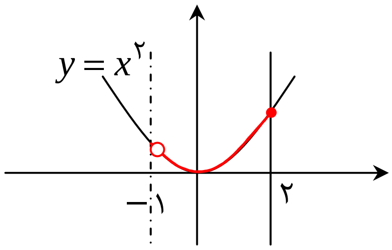
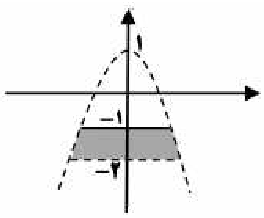
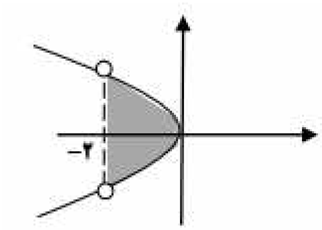
فصل سوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۱ : فضای سه بعدی و بردار

۱	نمودار معادلات $y=x^۲$ و $y=۲$ را رسم می کنیم. سپس ناحیه‌ی مشترک نامعادلات $x^۲\le y$ و $y\le ۲$ را تعیین می کنیم.  $\begin{cases} y=x^۲ \\ y=۲ \end{cases} \to x^۲=۲ \to x=\pm\sqrt{۲}$
۲	الف) وجه $CDFG$ شرایط ($x=۲$ و $۰\le y\le ۴$ و $۰\le z\le ۳$) را دارد. ب) معادلات $\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$ یال AD را مشخص می کنند.  پ) مختصات نقطه‌ی D به صورت $D(۲,۴,۳)$ می باشد. ت) صفحه به معادله‌ی $y=۲$ هم موازی با صفحه‌ی xoz باشد و هم مکعب مستطیل را نصف کند.
۳	با دو بار استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه‌ی BCD و ABD ، می توان نوشت:  $x^۲=(۴)^۲+(۵)^۲ \to x^۲=۱۶+۲۵$ $\to x^۲=۴۱ \to x=\sqrt{۴۱}$ $y^۲=(\sqrt{۴۱})^۲+(۳)^۲ \to y^۲=۴۱+۹$ $\to y^۲=۵۰ \to y=۵\sqrt{۲}$
۴	نمودار مربوط به معادله‌ی $x=۰$ در $R^۳$ ، تمام نقاط صفحه‌ی yz است.

	توجه : نمودار مربوط به معادله‌ی $y=\circ$ در $R^{۳}$ ، تمام نقاط صفحه‌ی xz است و همچنین نمودار مربوط به معادله-ی $z=\circ$ در $R^{۳}$ ، تمام نقاط صفحه‌ی xy است.
۵	محور عرض ها
۶	درست
۷	
۸	$\Vert\vec{a}\Vert=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{(\circ)^{۲}+(-۳)^{۲}+(۴)^{۲}}=\sqrt{\circ+۹+۱۶}=۵$
۹	نادرست، نقطه روی محور z قرار دارد.
۱۰	الف) با توجه به مختصات نقطه‌ی $A(۰,۰,۳)$ ، واضح است که صفحه‌ی مورد نظر $z=۰$ می باشد. ب) ابتدا نمودار خطوط $y=-۲$ (به شکل نقطه چین)و $y=-۱$ (به صورت کامل) و منحنی $y=-x^{۲}+۱$ (به شکل نقطه چین) را در فضای دو بعدی رسم می کنیم. 
۱۱	ابتدا نمودار های معادلات $x=-۲$ و $y^{۲}+x=\circ$ را رسم می کنیم. (خط چین را مورد توجه قرار می دهیم.) سپس ناحیه‌ی مورد نظر را با توجه به نامساوی ها تعیین می کنیم. در این صورت نمودار زیر به دست می آید. 
۱۲	محور z ها ، این معادلات نشان دهنده‌ی صفحه ای موازی محور z ها می باشد.
۱۳	چون نقطه‌ی A روی محور ارتفاع ها قرار دارد، لذا مختصات آن به صورت $A(\circ,\circ,۱)$ می باشد. اکنون مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB را به شکل زیر می توان به دست آورد. $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{\circ+۱}{۲}=\dfrac{۱}{۲}$ $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{\circ+\circ}{۲}=\circ$

	$z_M=\frac{z_A+z_B}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$ لذا فاصله‌ی نقطه‌ی $M(\frac{۱}{۲},۰,۲)$ تا مبدأ مختصات به صورت زیر است. $OM=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(۰)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۱۷}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$
۱۴	درست ، به توجه به علامت مولفه های این نقطه، به سادگی معلوم می شود که این نقطه، در ناحیه‌ی ششم واقع است.

فصل سوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۲ : ضرب داخلی دو بردار و کاربرد

۱

الف)

$\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}=(۲,۳,-۱)$

$\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}=(۱,۰,۱)$

$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(۳)(۰)+(-۱)(۱)=۲+۰-۱=۱$

$\|\vec{a}\|=\sqrt{۴+۹+۱}=\sqrt{۱۴}$

$\|\vec{b}\|=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\dfrac{۱}{\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۲}}=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۷}}$

ب)

$\vec{c}=(۰,۲,۱)$

$\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}=(۱,۰,۱)-(۰,۲,۱)=(۱,-۲,۰)$

$\vec{a}.\vec{d}=(۲)(۱)+(۳)(-۲)+(-۱)(۰)=۲-۶+۰=-۴$

$\|\vec{d}\|=\sqrt{۱+۴+۰}=\sqrt{۵}$

$\vec{a}'=\dfrac{\vec{a}.\vec{d}}{\|\vec{d}\|^۲}\vec{d}=\dfrac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$

۲

اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، پس زاویه‌ی بین آنها برابر $\dfrac{\pi}{۲}$ است. لذا :

$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos(\dfrac{\pi}{۲})=۰$

حال اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$ پس $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=۰$ و چون $\|\vec{b}\|\neq۰$ و $\|\vec{a}\|\neq۰$ لذا $\cos\theta=۰$ یعنی $\theta=\dfrac{\pi}{۲}$

یعنی دو بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ بر هم عمودند.

۳

الف)

$\vec{a}=۴\vec{k}-۲\vec{j}-\vec{i}=(-۱,-۲,۴)$

	$\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}=(۱,۲,۰)$ $۳\vec{a}-\vec{b}=۳(-۱,-۲,۴)-(۱,۲,۰)=(-۳,-۶,۱۲)+(-۱,-۲,۰)=(-۴,-۸,۱۲)$ $r(۳\vec{a}-\vec{b})=\frac{۱}{۴}(-۴,-۸,۱۲)=(-۱,-۲,۳)$ ب) اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، در این صورت، می توان نوشت: $\vec{a}.\vec{b}=(-۱)(۱)+(-۲)(۲)+(۴)(۰)=-۵$ $\lVert\vec{b}\rVert=\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۴+۰}=\sqrt{۵}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lVert\vec{b}\rVert^۲}\vec{b}=\frac{-۵}{(\sqrt{۵})^۲}(۱,۲,۰)=-(۱,۲,۰)=(-۱,-۲,۰)$
۴	فرض کنید که θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت: $\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(۲)(۰)+(-۱)(-۱)=۲+۰+۱=۳$ $\lVert\vec{a}\rVert=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$ $\lVert\vec{b}\rVert=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lVert\vec{a}\rVert\times\lVert\vec{b}\rVert}=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\theta=\frac{\pi}{۴}$
۵	$\vec{a}\perp\vec{b}\to\vec{a}.\vec{b}=۰\to(۲)(m+۱)+(m)(۳)+(-۱)(۲)=۰$ $\to ۲m+۲+۳m-۲=۰\to m=۰$
۶	درست (نامساوی کشی شوارتز)
۷	$\lVert\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\rVert^۲=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ $=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}$ $=\lVert\vec{a}\rVert^۲+۰+۰+۰+\lVert\vec{b}\rVert^۲+۰+۰+۰+\lVert\vec{c}\rVert^۲=(۲)^۲+(۳)^۲+(۴)^۲$ $=۴+۹+۱۶=۲۹$
۸	$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(-۲)+(-۶)(۱)+(۴)(-۵)=-۴-۶-۲۰=-۳۰$ $\lVert\vec{b}\rVert=\sqrt{(-۲)^۲+(۱)^۲+(-۵)^۲}=\sqrt{۴+۱+۲۵}=\sqrt{۳۰}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lVert\vec{b}\rVert^۲}\vec{b}=\frac{-۳۰}{۳۰}(-۲,۱,-۵)=(۲,-۱,۵)$
۹	می دانیم که برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم. $\vec{a}.\vec{b}=\lVert\vec{a}\rVert\times\lVert\vec{b}\rVert\cos\theta$ حال با توجه به اینکه $\vec{a}.\vec{b}=\lVert\vec{a}\rVert\times\lVert\vec{b}\rVert$ نتیجه گرفته می شود که $\cos\theta=۱$ یعنی $\angle\theta=۰^\circ$
۱۰	$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lVert\vec{a}\rVert\times\lVert\vec{b}\rVert}\to-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲-n}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۴+۱+n^۲}}\to\frac{n-۲}{\sqrt{n^۲+۵}}=۱$

	$\to n^{۲}+۵=n^{۲}-۴n+۴\to ۵=-۴n+۴\to n=-\frac{۱}{۴}$
۱۱	$\vec a=r\vec b\to \vec a'=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}\vec b=\frac{(r\vec b).\vec b}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}\vec b=\frac{r(\vec b.\vec b)}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}\vec b=\frac{r\Vert\vec b\Vert^{۲}}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}\vec b=r\vec b=\vec a$
۱۲	گزینه‌ی ۱، زیرا بنابر اینکه $\vec a.\vec b=\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert\cos\theta$. این تساوی وقتی بیشترین مقدار را دارد که $\cos\theta=۱$ یعنی $\theta=۰$ باشد.
۱۳	روش اول : بردار $\vec a'$ با بردار $\vec b$ موازی است. $\vec a'\Vert\vec b\to\vec a'=k\vec b$ $(\vec a-\vec a')\perp\vec b\to(\vec a-\vec a').\vec b=۰\to\vec a.\vec b-(k\vec b).\vec b=۰$ $\to\vec a.\vec b-k(\vec b.\vec b)=۰\to\vec a.\vec b-k\Vert\vec b\Vert^{۲}=۰\to k=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}$ $\to\vec a'=k\vec b=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}\vec b$ روش دوم : در مثلث قائم الزاویه، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ را θ می نامیم. $\cos\theta=\frac{\Vert\vec a'\Vert}{\Vert\vec a\Vert}\to\Vert\vec a'\Vert=\Vert\vec a\Vert\cos\theta$ $\vec a'=k\vec b\to\Vert\vec a'\Vert=\Vert k\vec b\Vert\to\Vert\vec a'\Vert=k\Vert\vec b\Vert$ $k=\frac{\Vert\vec a'\Vert}{\Vert\vec b\Vert}=\frac{\Vert\vec a\Vert\cos\theta}{\Vert\vec b\Vert}=\frac{\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert\cos\theta}{\Vert\vec b\Vert\times\Vert\vec b\Vert}=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}$ $\to\vec a'=k\vec b=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec b\Vert^{۲}}\vec b$
۱۴	فرض کنید که θ زاویه بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ باشد. در این صورت: $\vec a.\vec b=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۲+۱+۰=۳$ $\Vert\vec a\Vert=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳$ $\Vert\vec b\Vert=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert}=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\theta=\frac{\pi}{۴}$
۱۵	$\vec a.\vec b=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=(m)(۲)+(۰)(-۲)+(۲)(۰)=۲m$ $\cos\theta=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert}\to\frac{۱}{۲}=\frac{۲m}{(\sqrt{m^{۲}+۴})(۲\sqrt{۲})}\to\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{m}{\sqrt{m^{۲}+۴}}$ $\to\sqrt{۲}\times\sqrt{m^{۲}+۴}=۲m\to ۲(m^{۲}+۴)=۴m^{۲}\to ۲m^{۲}=۸$ $\to m^{۲}=۴\to m=۲\quad,\quad m=-۲$ جواب $m=-۲$ قابل قبول نیست.

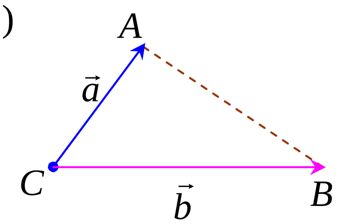
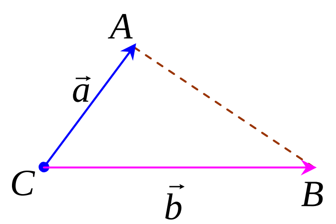
۱۶	$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}=(۱,۱,۱)$ $\vec{v}=۲\vec{c}-\vec{b}=(۳,-۴,۰)\to\lVert\vec{v}\rVert=\sqrt{۹+۱۶+۰}=۵$ $\vec{u}.\vec{v}=(۱)(۳)+(۱)(-۴)+(۱)(۰)=۳-۴+۰=-۱$ $\vec{u}'=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\lVert\vec{v}\rVert^۲}\vec{v}=\frac{-۱}{۲۵}\times(۳,-۴,۰)=(-\frac{۳}{۲۵},\frac{۴}{۲۵},۰)$

فصل سوّم

((هندسه ۳))

❋❋❋

درس ۳ : ضرب خارجی دو بردار و کاربرد

نادرست : برای دو بردار واحد $\vec{i}=(1,0,0)$ و $\vec{j}=(0,1,0)$ $\vec{i}\times\vec{j}=(\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix})=(0,0,1)=\vec{k}$	۱
زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همان زاویه‌ی بین دو بردار $2\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض می باشد. پس : $\|2\vec{a}\times\vec{b}\|=\|2\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos(30^\circ)=2(6)(4)(\frac{1}{2})=24$	۲
چون هر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه واقعند، پس حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر صفر است. زیرا کلاً با سه بردار واقع بر یک صفحه، متوازی السطوحی ایجاد نمی شود.	۳
با معلوم بودن مختصات سه رأس مثلث ABC ، مساحت مثلث را می توان با استفاده از ضرب خارجی به شکل زیر به دست آورد. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2,-1,3)-(-1,1,0)=(3,-2,3)$ $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(3,1,4)-(-1,1,0)=(4,0,4)$ $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-2&3\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&3\\4&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-2\\4&0\end{vmatrix})=(-8,0,8)$  پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است. $S=\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{1}{2}\sqrt{(8)^2+(0)^2+(8)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{64+0+64}=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$	۴
درست، برابر هر بردار مانند $\vec{a}$ ثابت می شود که $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$	۵
اگر $A(-1,2,0)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(0,-1,1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به شکل زیر به دست می آید. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(-1,2,0)-(0,-1,1)=(-1,3,-1)$ $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(1,0,-1)-(0,-1,1)=(1,1,-2)$ $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}3&-1\\1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&3\\1&1\end{vmatrix})=(-5,-3,-4)$  	۶

پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است.

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec a\times\vec b\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۵)^۲+(-۳)^۲+(-۴)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵۰}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۷

$$\vec a.\vec b=\|\vec a\|\times\|\vec b\|\times\cos\theta\to ۱۰=۳\times۵\times\cos\theta\to\cos\theta=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\sin^۲\theta=۱-\cos\theta}\sin^۲\theta=۱-(\frac{۲}{۳})^۲\to\sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\|\vec a\times\vec b\|=\|\vec a\|\times\|\vec b\|\sin\theta=۳\times۵\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}=۵\sqrt{۵}$$

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}\|\vec a\times\vec b\|=\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۵}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۵}$$

۸

$$\vec b\times\vec c=(\begin{vmatrix}۲&۲\\-۳&۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰&۲\\۲&-۳\end{vmatrix})=(۶,۴,-۴)$$

$$\vec a.(\vec b\times\vec c)=(۱)(۶)+(۰)(۴)+(-۱)(-۴)=۶+۰+۴=۱۰$$

$$v=|\vec a.(\vec b\times\vec c)|=۱۰$$

۹

$$\vec a=-\vec k-\vec j=(۰,-۱,-۱)$$

$$\|\vec a\|=\sqrt{(۰)^۲+(-۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\|\vec b\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\vec a.\vec b=(۰)(۲)+(-۱)(-۱)+(-۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec a.\vec b}{\|\vec a\|\times\|\vec b\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\alpha=۴۵^\circ$$

ب) کافی است، بردار $\vec a\times\vec b$ را تعیین کنید.

$$\vec a\times\vec b=(\begin{vmatrix}-۱&-۱\\-۱&-۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱&۰\\-۲&۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰&-۱\\۲&-۱\end{vmatrix})=(۱,-۲,۲)$$

۱۰

$$\vec b\times\vec c=(\begin{vmatrix}-۱&۲\\۱&۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲&۲\\۲&۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{vmatrix})=(-۴,۲,۵)$$

$$\vec a.(\vec b\times\vec c)=(۱)(-۴)+(۱)(۲)+(۰)(۵)=-۴+۲+۰=-۲$$

چون حاصل $\vec a.(\vec b\times\vec c)$ برابر صفر نیست، پس سه بردار داده شده روی یک صفحه نیستند.

۱۱

الف :

$$\vec b=\vec i+\vec k\to\vec b=(۱,۰,۱)\to۲\vec b=(۲,۰,۲)$$

$$۲\vec b-\vec c=(۲,۰,۲)-(۰,۲,۱)=(۲,۰,۲)+(۰,-۲,-۱)=(۲,-۲,۱)$$

$$\|۲\vec b-\vec c\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۲)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$$

ب :

$\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}=(۲,۳,-۱)$ $\vec{b}+\vec{c}=(۱,۰,۱)+(۰,۲,۱)=(۱,۲,۲)$ $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix})=(۸,-۵,۱)$ اکنون مساحت مثلث مورد نظر را به شکل زیر به دست می آوریم. $S=\|\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\|=\sqrt{(۸)^۲+(-۵)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۶۴+۲۵+۱}=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$	
$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}=(۱,۰,۱)$ $\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix})=(۱,۱,-۱)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۱)+(۱)(۱)+(۰)(-۱)=۲$ $\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix})=(۱,۱,-۱)\rightarrow\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\sqrt{۱+۱+۱}=۳$ $h=\dfrac{\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}=\dfrac{۲}{\sqrt{۳}}$ اندازه‌ی ارتفاع متوازی السطوح	**۱۲**
وقتی گفته می شود که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$، نتیجه می شود که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند. لذا وجود دارد یک عدد حقیقی و غیر صفر مانند k که $\vec{b}=\vec{a}k$ یعنی : $\vec{b}=k(۴,-۴,۲)=(۴k,-۴k,۲k)$ پس : $\|\vec{b}\|=\sqrt{(۴k)^۲+(-۴k)^۲+(۲k)^۲}=\sqrt{۱۶k^۲+۱۶k^۲+۴k^۲}=\sqrt{۳۶k^۲}=۶\|k\|$ از طرفی چون $\|\vec{b}\|=۱۲$ ، پس نتیجه می شود: $۶\|k\|=۱۲\rightarrow\|k\|=۲\rightarrow k=\pm۲$ و بنابر صورت مساله باید حالت $k=-۲$ قابل قبول باشد. در نهایت بردار b بدین شکل خواهد بود: $\vec{b}=(-۸,۸,-۴)$	**۱۳**
الف: درست. در واقع $\vec{i}\times\vec{j}$ بر $\vec{i}$ عمود است. ب : گزینه‌ی۳ ، چون حاصل ضرب خارجی دو برادر بر هر دو بردار عمود است، لذا فقط بردار مورد ۳ عمود بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیست؟	**۱۴**
صفر ، زیرا: $((\vec{i}\times\vec{k})\times\vec{i}).\vec{j}=(\vec{j}\times\vec{i}).\vec{j}=-\vec{k}.\vec{j}=۰$	**۱۵**
$\vec{u}=\vec{a}-\vec{j}=(-۲,-۱,۱)$ $\vec{u}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۲ & ۳\end{vmatrix}=-\vec{i}+۷\vec{j}+۵\vec{k}=(-۱,۷,۵)$	**۱۶**

	$\|\|\vec{u}\times\vec{b}\|\|=\sqrt{۱+۴۹+۲۵}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$ $S=\frac{۱}{۲}\|\|\vec{u}\times\vec{b}\|\|=\frac{۱}{۲}(۵\sqrt{۳})$
۱۷	چون سه بردار داده شده، روی یک صفحه قرار دارند، پس $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\circ$ ، لذا برای تعیین مقدار m ، به شکل زیر عمل می کنیم. $\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ m & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & m\end{vmatrix})=(۱-m,۲,m+۱)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(m)(۱-m)+(-۱)(۲)+(۱)(m+۱)$ $=m-m^{۲}-۲+m+۱=-m^{۲}+۲m-۱$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\circ\rightarrow -m^{۲}+۲m-۱=\circ\rightarrow m^{۲}-۲m+۱=\circ$ $\rightarrow (m-۱)^{۲}=\circ\rightarrow m=۱$ روش دوم : $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}m & -۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۱ & m & -۱\end{vmatrix}=m^{۲}-۲m+۱=(m-۱)^{۲}$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\circ\rightarrow (m-۱)^{۲}=\circ\rightarrow m=۱$