

سؤالات موضوعی نہائی

((ریاضیات گسستہ))

پہ درازدہم رشتہ می ریاضی فنریک

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

آخرین نسخہ: شریور ۱۴۰۲

((فصل اول : آشنایی با نظریه‌ی اعداد))



درس ۱ : استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

۰/۲۵ نمره	دی ۹۷	<p>۱ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.</p> <p>اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.</p>
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	<p>۲ اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.</p>
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>۳ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف : مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.</p> <p>ب : برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</p>
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	<p>۴ گزاره‌ی درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.</p> <p>الف : مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>ب : اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.</p>
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>۵ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف : برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$</p> <p>ب : اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$</p> <p>پ : اگر $a, b \in R$ داریم : $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$</p> <p>ت : حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p>
۰/۵ نمره	دی ۹۹	<p>۶ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید.</p> <p>برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</p>
۰/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>۷ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف : حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.</p> <p>ب : هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه‌ی $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.</p>

۸	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
---	--	-------------	--------

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها (روش اشباع)

۱			
۲			

اثبات غیر مستقیم

۱	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	دی ۹۷	۱/۲۵ نمره
۲	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید، اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۴	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت $\alpha - \beta$ گنگ است.	دی ۹۹	۱/۵ نمره

اثبات بازگشتی / گزاره‌های هم ارز

۱	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $xy + x + y \geq x^2 + y^2 + 1$	دی ۹۷	۱ نمره
۲	ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید. برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۴
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۵
۱ نمره	دی ۹۸	به روش بازگشتی، ثابت کنید، اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۶
۱ نمره	خرداد ۹۹	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$	۷
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	۸
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	به روش بازگشتی، ثابت کنید حاصل هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی با نصف مجموع مربعات آنها است.	۹

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عادکردن و ویژگی های آن

۱ نمره	دی ۹۷	اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $4k + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6 \mid 25$	۲
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 \mid b^3$ آنگاه $a \mid b$	۳
۱ نمره	دی ۹۸	اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $4k + 9 \mid a$ و $6k + 14 \mid a$ صدق کند، مقدار a را بیابید.	۴

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	۵ اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۳a + ۳$ بر ۸ را به دست آورید.
۱ نمره	۹۹ خرداد	۶ اگر $n \in N$ و $n ۹k + ۷$ و $n ۷k + ۶$ ثابت کنید $n = ۱$ یا $n = ۵$
۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	۷ اگر $a ۵m - ۲$ و $a ۳m + ۱$ ، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟
۱/۲۵ نمره	۹۹ شهریور	۸ فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a ۳n + ۴$ و $a ۲n + ۳$. نشان دهید: $a = ۱$
۰/۵ نمره	۱۴۰۰ خرداد	۹ جاهای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب پر کنید. دو عدد a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آنگاه عدد شمارنده‌ی عدد است.
۰/۲۵ نمره	۱۴۰۰ شهریور	۱۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a b$ و n و m دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آنگاه $a^n b^n$
۱ نمره	۱۴۰۰ شهریور	۱۱ اگر $a > ۱$ ، $a ۹k + ۴$ و $a ۵k + ۳$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

۰/۲۵ نمره	۹۷ دی	۱ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند.
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	۲ در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[(۱۲, (۶, ۸))]$ برابر خواهد شد.
۰/۲۵ نمره	۹۸ خرداد	۳ حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ $([m^۲, m], m^۵) = \dots$ الف) m ب) $m^۰$ ج) $m^۵$ د) $m^۲$

شهریور ۹۸ نمره ۰/۵	۴	جای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. و $\forall m > 0$ ۲) ۱) $a c$ و $b c$
دی ۹۸ نمره ۰/۲۵	۵	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a b$ ، آنگاه $[a, b] = b $
دی ۹۸ نمره ۱	۶	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.
خرداد ۹۹ نمره ۱	۷	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم، $(a, b) = 1$ ، می گوئیم a و b دو عدد هستند. ب: اگر $a b$ ، مقدار $[a, b]$ برابر با است.
خرداد ۹۹ نمره ۰/۲۵	۸	بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $4k$ و $16k^2 - 1$ را بیابید.
دی ۹۹ نمره ۰/۲۵	۹	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a b$ آنگاه $[a, b] = b $
دی ۹۹ نمره ۱/۲۵	۱۰	اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(3 + 2a, 4 + 5a)$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵	۱۱	جای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید. عدد m یک عدد صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است.
شهریور ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵	۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a b$ آنگاه $(a, b) = a$

قضیه ی تقسیم و کاربردها

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر عددی صحیح و فرد باشد و $2 + a b$ در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $3 + a^2 + b^2$ را بر ۸ بیابید.	۱
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	اگر باقی مانده ی تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.	۲
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد $127 -$ بر ۱۵ باقیمانده برابر و خارج قسمت است.	۳
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	اگر باقی مانده ی تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده ی تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۴
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	اگر باقی مانده ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده ی $2a - 1$ تقسیم بر ۳۱ را به دست آورید.	۵
۱/۵ نمره	شهریور ۹۹	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد؛ آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ($k \in W$) نوشته می شود.	۶
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5n - 2m$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۷
۱ نمره	دی ۹۹	اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5b - 2a$ بر ۱۷ را بیابید.	۸
۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود.	۹
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.	۱۰

افراز مجموعه ی اعداد صحیح

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $8k - 1$ نوشت. ($k \in Z$)	تیر ۹۸	نمره ۰/۲۵
۲			

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهشتی و ویژگی های آن

۱	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$ بر ۷ را به دست آورید.	دی ۹۷	نمره ۱
۲	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	خرداد ۹۸	نمره ۱
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a \equiv b$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b$ ب: باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است.	خرداد ۹۸ خارج ک	نمره ۰/۵
۴	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال است.	خرداد ۹۸ خ	نمره ۰/۲۵
۵	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.	شهریور ۹۸	نمره ۱/۵
۶	باقی مانده‌ی تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.	دی ۹۸	نمره ۱
۷	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه‌ی هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر $a \equiv b$ آنگاه $ac \equiv bc$	دی ۹۸	نمره ۱
۸	باقی مانده‌ی تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	خرداد ۹۹	نمره ۱/۵

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

شهریور ۹۹	شماره ۱/۲۵	رقم یکان عدد $7 + 2^{11}$ را به دست آورید.	۹
شهریور ۹۹	شماره ۱	فرض کنیم $m \in N$ و $a, b \in Z$ ، اگر $a \equiv b^m$ و $n \in N$ ، ثابت کنید $a^n \equiv b^n$	۱۰
دی ۹۹	شماره ۱/۲۵	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + 38^{36}$ را بر ۴ به دست آورید.	۱۱
خرداد ۱۴۰۰	شماره ۰/۲۵	باقی مانده‌ی تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ را بر ۷ بیابید.	۱۲
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a \equiv b^m$ باشد، آنگاه باقی مانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی اند.	۱۳
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۱	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یک عدد $9a + 6$ را به دست آورید.	۱۴

معادله‌ی همنهشتی

دی ۹۷	شماره ۱	معادله‌ی همنهشتی $3x \equiv 13^7$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
تیر ۹۸	شماره ۱	جواب عمومی معادله‌ی $4x \equiv 17^5$ را به دست آورید.	۲
دی ۹۸	شماره ۰/۲۵	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a, b) m$	۳
خرداد ۹۹	شماره ۱/۲۵	معادله‌ی هم نهشتی $5x \equiv 2^{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۴

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۵/۵ نمره	دی ۹۹	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. $m \mid ax \equiv b \iff (a, b) \mid m$	۵
۱ نمره	دی ۹۹	معادله‌ی $8x \equiv 20$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۶
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	معادله‌ی $7x \equiv 1$ را حل کنید.	۷
۲۵/۰ نمره	شهریور ۱۴۰۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. منظور از حل معادله‌ی هم نهشتی، پیدا کردن همه‌ی جواب‌های حقیقی است که در معادله- $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کند.	۸

معادله‌ی سیاله

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $5x + 2y = 18$ به معادله‌ی هم نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $7x + 5y = 11$ را بدست آورید.	۲
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $2000x + 5000y = 29000$ به معادله‌ی هم نهشتی و حل آن، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۳
۱/۵ نمره	دی ۹۸	جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $9x + 13y = 7$ را بدست آورید.	۴
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	معادله‌ی سیاله‌ی $4x + 3y = 19$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید معادله‌ی سیاله دارای جواب است. ب: جواب عمومی معادله‌ی سیاله‌ی داده شده را بیابید.	۵
۱ نمره	شهریور ۹۹	معادله‌ی سیاله‌ی $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۶

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	معادله سیاله‌ی $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۷
-------------	----------------	--	---

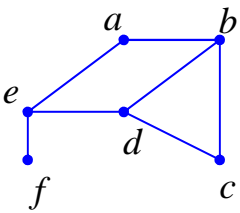
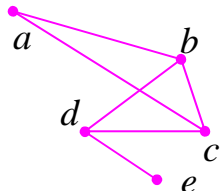
((فصل دوّم : گراف و مدل سازی))

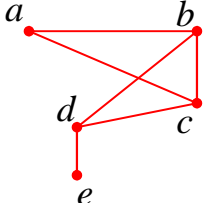
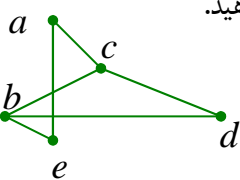
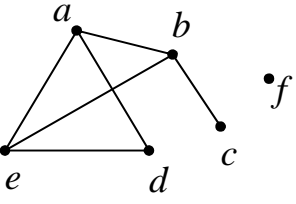


درس ۱: معرفی گراف

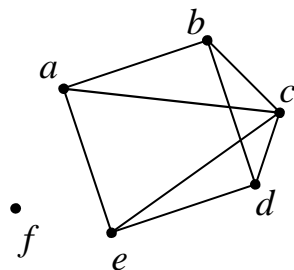
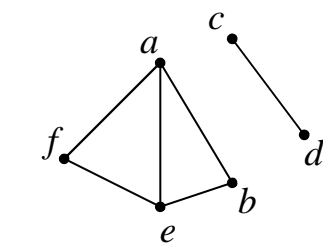
تعاریف و اثبات ها

۰/۵ نمره	دی ۹۷	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف : گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.</p> <p>ب : گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.</p>
۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>با توجه به گراف شکل مقابل (گراف G) به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>الف : یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>پ : درجه ی رأس a در گراف G را تعیین کنید.</p> <p>ت : آیا گراف G همبند است؟ چرا؟</p> <p>ث : یک زیر گراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>گراف G با مجموعه ی رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه ی یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف : مجموعه ی همسایگی های باز رأس d را بنویسید.</p> <p>ب : اندازه ی گراف را مشخص کنید.</p> <p>ج : مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف و مقادیر $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را تعیین کنید.</p>

۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>یک گراف کامل ۸ رأسی ، یال دارد.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۷ شکل مقابل نمودار گراف G می باشد.</p> <p>الف: مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید.</p> <p>ب: مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید.</p> <p>ج: مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p> 
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۸ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر است.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۹ گراف G را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.</p> <p>الف) مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌ها را بنویسید.</p> <p>ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ج) درجه‌ی رأس e را در گراف \bar{G} مشخص کنید.</p> 
۰/۲۵ نمره خ	<p>۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p>
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۱۱ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.</p>
۲ نمره	شهریور ۹۸	<p>۱۲ گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه‌ی یال‌های زیر را در نظر بگیرید.</p> <p>$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$</p> <p>الف: نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>ب: $N_G[b]$ را مشخص کنید.</p> <p>ج: یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.</p>

۱۳	شهریور ۹۸	در هر مورد یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k - منتظم رسم کنید، به طوری که: الف: بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.
۱۴	دی ۹۸	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.
۱۵	دی ۹۸	گراف G به صورت مقابل است را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف: $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب: اندازه‌ی گراف را تعیین کنید. پ: مجموعه‌ی همسایگی بسته رأس b را بنویسید. ت: اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد. x کدام رأس است؟
		
۱۶	دی ۹۸	هر یک از موارد زیر را پاسخ دهید. الف: گراف k - منتظم از مرتبه‌ی n را تعریف کنید. ب: آیا گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۵ وجود دارد؟ دلیل خود را بنویسید.
۱۷	دی ۹۸	اگر G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف: دوری به طول ۵ مشخص کنید. ب: مکمل گراف G را رسم کنید.
		
۱۸	خرداد ۹۹	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف: مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف تعداد یال‌ها است. ب: در یک گراف k - منتظم، ماگزیمم درجه‌ی رأس برابر با است.
۱۹	خرداد ۹۹	گراف G را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف: $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب: یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ: یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.
		
۲۰	۹۹	در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \overline{G} برابر ۱۲ است. مرتبه‌ی گراف G را مشخص کنید.

۱ نمره	۹۹ خرداد	گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. الف : اندازه‌ی گراف G را بیابید. ب : نمودار گراف G را رسم کنید.	۲۱
۱ نمره	۹۹ خرداد	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۲۲
۱ نمره	۹۹ خرداد	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف : تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب : گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ است. ت : گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	۲۳
۲ نمره	۹۹ خرداد	گراف G در شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : دوری به طول ۴ برای b بنویسید. پ : مکمل گراف G را رسم کنید. ت : $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید.	۲۴
۱ نمره	۹۹ خرداد	در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه‌ی p رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان پذیر نبود، دلیل را ارائه کنید. الف : $p=5$ و $r=2$ ب : $p=7$ و $r=3$	۲۵
۲/۵ نمره	۹۹ شهریور	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر را پاسخ دهید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : سه دور به طول ۳ بنویسید. پ : ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت : $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث : آیا گراف G همبند است.	۲۶



شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید. سپس گراف را رسم کنید.	۲۷
شهریور ۹۹	شماره ۱	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۲۸
شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۲۹
دی ۹۹	شماره ۱	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف: مرتبه‌ی گراف نشان دهنده‌ی تعداد گراف می باشد. ب: اگر یک یال، یک رأس به خود آن رأس وصل کند، این یال را می نامیم. پ: دو یال را می نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها را به هم متصل کند. ت: تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.	۳۰
دی ۹۹	شماره ۲	گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید. الف: درجه‌ی رأس e در گراف مکمل G چند است؟ ب: تمام دوره‌های موجود در گراف G را بنویسید. پ: $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۳۱
دی ۹۹	شماره ۱	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف: گراف k -منتظم را تعریف کنید. ب: گراف P_7 را رسم کنید. پ: آیا گراف‌های C_n منتظم هستند.	۳۲
خرداد ۱۴۰۰	شماره ۲	گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگترین درجه در گراف \overline{G} را با اعضا مشخص کنید. پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟	۳۳
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۲/۳۵	با توجه به گراف G در شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجه‌ی رأس a در گراف \overline{G} را تعیین کنید. ت) مجموعه‌ی $N_G(f)$ را معین کنید.	۳۴

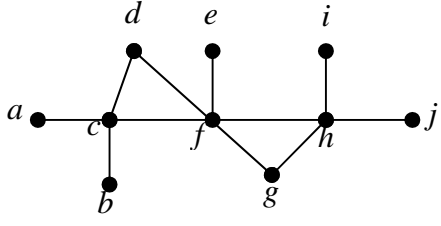
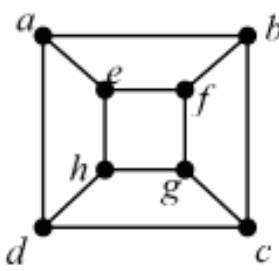
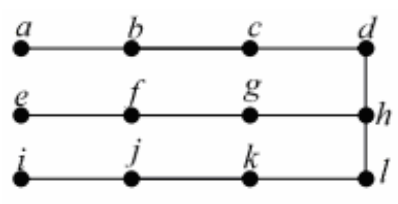
شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱/۲۵	گراف G ، ۳- منتظم است و اندازه‌ی آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس های گراف است. مرتبه‌ی گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.	۳۵
-------------	-----------	---	----

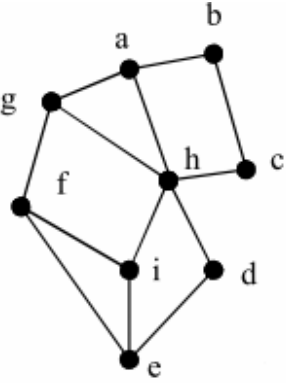
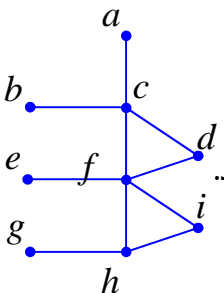
درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

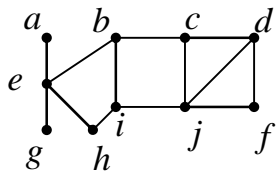
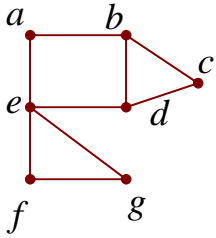
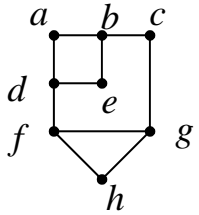
دی ۹۷	نمره ۱	<p>گراف P_7 در شکل مقابل رسم شده است.</p>  <p>الف: یک γ - مجموعه از این گراف مشخص کنید.</p> <p>ب: یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱
خرداد ۹۸	نمره ۱	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>الف: در یک گراف از مرتبه‌ی ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است.</p> <p>ب: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p داشته باشیم، $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.</p>	۲
خرداد ۹۸	نمره ۱/۵	<p>گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف: یک مجموعه‌ی احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.</p> <p>ب: عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید.</p> <p>ج: دو مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.</p>	۳
خرداد ۹۸	نمره ۱/۵	<p>الف: ثابت کنید هر مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال تبدیل کرد.</p> <p>ب: در گراف روبرو یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.</p> 	۴

۱ نمره	خرداد ۹۸	<p>الف : یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه ی احاطه گر یکتا با اندازه ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب : یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه ی احاطه گر یکتا با اندازه ی ۲ داشته باشد.</p>
۵/۱ نمره	تیر ۹۸	<p>جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.</p> <p>عدد احاطه گری گراف C_n برابر می باشد.</p>
۵/۱ نمره	تیر ۹۸	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف: یک $\gamma -$ مجموعه در گراف P_5، دارای ۲ عضو است.</p> <p>ب : تعداد کمتر از $\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ رأس نمی توانند تمام n رأس گراف را احاطه کنند.</p>
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	<p>در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.</p> <p>الف) یک گراف ۲ منتظم از مرتبه ی ۸، که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p> <p>ب) یک گراف ۵ رأسی که $\gamma -$ مجموعه ی آن با اندازه ی یک باشد.</p> <p>ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ که یک مجموعه ی احاطه گر یکتا با اندازه ی ۲ داشته باشد.</p>
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	<p>اگر عدد احاطه گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد، در این صورت $V(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یالهایی را که گراف G می تواند داشته باشد را مشخص کنید.</p>
۱ نمره	تیر ۹۸	<p>در گراف شکل مقابل :</p> <p>الف) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمم مشخص کنید.</p> <p>ب) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p>
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	<p>مفاهیم زیر را تعریف کنید.</p> <p>الف) مجموعه ی احاطه گر</p> <p>ب) عدد احاطه گری</p>

<p>نمره ۱/۵</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج کشور</p>	<p>در گراف شکل مقابل :</p> <p>الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید.</p> <p>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال بنویسید.</p> <p>پ) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم بنویسید.</p> 	<p>۱۲</p>
<p>نمره ۱/۵</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج کشور</p>	<p>عدد احاطه گری گراف های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک γ-مجموعه بنویسید.</p> <p>الف)</p>  <p>ب)</p> 	<p>۱۳</p>
<p>نمره ۱</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج ک</p>	<p>الف) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن یک باشد.</p> <p>ب) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ بوده و مجموعه‌ی احاطه گری مینیمم آن یکتا باشد.</p>	<p>۱۴</p>
<p>نمره ۱/۵</p>	<p>شهریور ۹۸</p>	<p>الف : گراف P_8 را رسم کنید.</p> <p>ب : یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید.</p> <p>ج : یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	<p>۱۵</p>

<p>شهریور ۹۸ نمره ۱</p>		<p>۱۶ در گراف شکل زیر یک مجموعه ی احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از رأس ها ، آن را به یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.</p> 	<p>۱۶</p>
<p>دی ۹۸ نمره ۱/۲۵</p>		<p>۱۷ برای گراف روبرو :</p>  <p>الف : یک مجموعه ی احاطه گر با ۴ عضو مشخص کنید. ب : مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر مینیمال باشد.</p>	<p>۱۷</p>
<p>دی ۹۸ نمره ۱/۲۵</p>		<p>۱۸ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه ی گراف باشد. الف : گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ است. ب : گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گری بزرگتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ باشد.</p>	<p>۱۸</p>
<p>خرداد ۹۹ نمره ۰/۵</p>		<p>۱۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف : در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه ی احاطه گر گراف G می نامیم. ب : یک مجموعه ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.</p>	<p>۱۹</p>
<p>خرداد ۹۹ نمره ۱</p>		<p>۲۰ گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که : الف : مجموعه ی احاطه گر یکتا با اندازه ی ۲ داشته باشد. ب : بیش از یک مجموعه ی احاطه گر با اندازه ی ۲ داشته باشد.</p>	<p>۲۰</p>

۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>عدد احاطه‌گری گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.</p>	۲۱
۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>عدد احاطه‌گری گراف زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p>	۲۲
۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید.</p>	۲۳
۱/۵ نمره	۹۹ شهریور	<p>عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.</p>	۲۴
۲ نمره	۹۹ دی	<p>در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است: الف: یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. ب: عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.</p>	۲۵
۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	<p>تفاوت بین مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.</p>	۲۶
۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p>	۲۷

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید.</p> 	۲۸
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی دو باشد، رسم کنید.</p>	۲۹
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>با ارائه‌ی راه حل، عدد احاطه‌گری گراف مقابل را تعیین کنید.</p> 	۳۰
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۳۱

((فصل سوم : ترکیبیات (شمارش)))



درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

۱ نمره	دی ۹۷	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متمایز) از A و سه رقم (متمایز) از B باشد؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	۶ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند؟ به طوری که : الف : به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب : همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج : یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.
۱ نمره	تیر ۹۸	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که : الف : همواره کتابهای فیزیک کنار هم باشند. ب : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. ج : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک همواره کنار هم باشند.
۱/۲۵ نمره	دی ۹۸	۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان در کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری که : الف : کتاب ها یکی در میان قرار گیرند؟ ب : کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های فیزیک نیز کنار هم باشند؟
۱ نمره	خرداد ۹۹	۴ دانش آموز پایه‌ی دهم و ۳ دانش آموز پایه‌ی یازدهم، به چند طریق می توانند در یک ردیف قرار گیرند. به طوری که : الف : هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب : همواره دانش آموزان پایه‌ی دهم کنار هم باشند.

سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۷	با ارقام ۴ و ۳ و ۷ و ۸ و ۶ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که :	الف : اعداد زوج کنار هم باشند. ب : اعداد فرد کنار هم باشند.	دی ۹۹ انصره
۸	به سئوالات زیر، پاسخ کوتاه بنویسید. می خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۸ و ۶ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آنها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمز هایی ک در آنها حروف کنار هم باشند.		خرداد ۱۴۰۰ انصره
۹	کوتاه پاسخ دهید : علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری که : الف : علی و حسین کنار هم باشند. ب : ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.		شهریور ۱۴۰۰ انصره

معادلات حسابی

۱	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟		دی ۹۷ انصره
۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0$ و $i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.		خرداد ۹۸ انصره
۳	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را بدست آورید. $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 12$ $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$		تیر ۹۸ انصره ۱/۵
۴	الف) به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد ؟ ب) اگر از هر ۴ نوع گل حداقل یکی انتخاب شود ، به چند طریق می توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد ؟		خرداد ۹۸ خ انصره ۲
۵	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4$ و $x_1 > 2$ را محاسبه کنید.		شهریور ۹۸ انصره
۶	معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب های صحیح و نامنفی به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ دارد؟ چرا؟		دی ۹۸ انصره

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱۳۵ نمره	خرداد ۹۹	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد. اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.
۱۱۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ چند جواب صحیح و مثبت دارد، به شرط آن که $x_2 > 2$ و $x_5 \geq 4$ باشند.
۱۳۵ نمره	شهریور ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_1 > 3$ باشند؟
۱۱۵ نمره	دی ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد. به شرط آنکه $x_5 = 2$ و $x_2 > 2$ باشند.
۲ نمره	خرداد ۱۴۰۰	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.
۱۱۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد.

جایگشت های با تکرار

۱ نمره	خرداد ۹۸	با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟
۱ نمره	تیر ۹۸	۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند.
۱۱۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید. تعداد رمزهای چهار رقمی که با ارقام ۱ و ۱ و ۱ و ۲ می توان ساخت برابر است.
۱ نمره	دی ۹۸	با حروف کلمه‌ی «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می توان نوشت؟

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	با ارقام عدد ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟	۵
۱ نمره	۹۹ خرداد	با ارقام عدد ۱۱۳۲۸۸۱۱۳۳ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت. (ساده کردن پاسخ نهایی الزامی نیست.)	۶
۰/۷۵ نمره	۹۹ شهریور	هشت نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۷
۱ نمره	۱۴۰۰ شهریور	می خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟	۸

مربع های لاتین

۱/۵ نمره	۹۷ دی	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.	۲
۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، بنویسید که چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟	۳
۰/۲۵ نمره	۹۸ تیر	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی n وجود ندارد.	۴
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید.	۵

۱ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	<p>۶ برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است؟</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱																				
۴	۲	۱	۳																																			
۳	۱	۲	۴																																			
۱	۴	۳	۲																																			
۲	۳	۴	۱																																			
۱ نمره	شهریور ۹۸	<p>۷ قرار است چهار مدرس T_1 و T_2 و T_3 و T_4 در چهار جلسه‌ی متوالی در چهار کلاس C_1 و C_2 و C_3 و C_4 تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.</p>																																				
۱/۷۵ نمره	دی ۹۸	<p>۸ بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین روبرو متعامدند؟ چرا؟</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲																		
۱	۲	۳																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۱	۲	۳																																				
۲	۳	۱																																				
۳	۱	۲																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۹ مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ یک مربع لاتین به دست آورید.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> </table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴																				
۲	۱	۴	۳																																			
۴	۳	۲	۱																																			
۳	۴	۱	۲																																			
۱	۲	۳	۴																																			
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۱۰ در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین را بررسی کنید.</p> <p>الف :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <p>ب :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۱	۲	۳																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۱	۲	۳																																				
۳	۲	۱																																				
۱	۳	۲																																				
۲	۱	۳																																				
۲	۱	۳																																				
۱	۳	۲																																				
۳	۲	۱																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۱۱ قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریزی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه ریزی کنید.</p>																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	<p>۱۲ یک مربع لاتین 4×4 چرخشی رسم کنید.</p>																																				

۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.</p> <table style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table style="display: inline-table;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
۵/۵ نمره	شهریور ۹۹	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.																		
۲ نمره	دی ۹۹	<p>مربع لاتین A را نظر بگیرید.</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ <p>الف: با اعمال یک جایگشت روی درایه های مربع لاتین A، مربع لاتین B را تولید کنید.</p> <p>ب: متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.</p>																		
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابجا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابجا کنید و مربع حاصل را B نامگذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$																		
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>الف: تمام مربع های لاتین 2×2 را بنویسید.</p> <p>ب: آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.</p>																		

درس ۲: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۲ نمره	دی ۹۷	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود).
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟ راه حل خود را بنویسید.
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند و بر ۴ بخش پذیر نباشند).

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	۴ به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	۵ بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ ($1 \leq n \leq 400$) چند عدد وجود دارد که : الف) بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟ ب) فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۶ چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟
۰/۲۵ نمره	دی ۹۸	۷ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ی ۲ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی برابر ۶ است.
۱/۲۵ نمره	دی ۹۸	۸ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی را به دست آورید.
۱ نمره	خرداد ۹۹	۹ به چند طریق می توان ۴ خودکار را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)
۱ نمره	خرداد ۹۹	۱۰ در بین اعداد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	۱۱ چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۷ بخش پذیر نباشند؟
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	۱۲ الف : چند تابع پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی می توان تعریف کرد؟ ب : چند تابع یک به یک از یک مجموعه ی ۴ عضوی به یک مجموعه ی ۶ عضوی وجود دارد؟
۱ نمره	شهریور ۹۹	۱۳ ۸ نفر را برای یک برنامه ی تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است. (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۱ نمره	شهریور ۹۹	تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ی ۳ عضوی به یک مجموعه ی ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)
۱ نمره	شهریور ۹۹	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.
۱/۵ نمره	دی ۹۹	مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید، چند عدد در S وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند، ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند.

اصل لانه کبوتری

۱/۵ نمره	دی ۹۷	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید.)
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	تعیین کنید که در یک اردوی دانش آموزش چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	<p>۴ یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.</p> 
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله ی آنها از هم ، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.</p>
۱ نمره	دی ۹۸	<p>۶ مجموعه ی اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ی ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.</p>
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۷ در یک اردوی دانش آموزی، حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لاقل ۷ نفر از آن ها ماه تولد یکسانی دارند؟</p>
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	<p>۸ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای کشتی باشند تا مطمئن باشیم، لاقل ۲۰ نفر آنها روز تولدشان در هفته یکسان است؟</p>
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>۹ نشان دهید در یک خانواده ی ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.</p>
۱ نمره	دی ۹۹	<p>۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن همایش باید حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیر تکراری است.</p>
۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>۱۱ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چندگلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم، گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟</p>
۰/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>۱۲ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقل ۲۰ نفر از آن ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟</p>

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل اول ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

۱	درست
۲	با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می گیریم هر دو عدد a و b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد n و m ، می توان در نظر گرفت $a = 2n - 1$ و $b = 2m - 1$. بنابراین: $a^2 + b^2 = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1$ $= 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad k \in Z$ یعنی $a^2 + b^2$ یک عدد زوج است.
۳	الف : درست ب : نادرست
۴	الف : نادرست ب : درست $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^c \rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^c$ $(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$
۵	الف: نادرست ب : درست پ : نادرست ت : نادرست
۶	نادرست $n = 4 \rightarrow 2^4 - 1 = 14 \notin P$
۷	الف: درست ب : نادرست

۸	فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض خلف: فرض کنیم $r + x$ گویا باشد. می دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(r + x) - r \in Q$ یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.
---	--

اثبات با در نظر گرفتن همه ی حالت ها

۱	
۲	

اثبات غیر مستقیم

۱	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.
۲	فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $r + x$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. پس تفاضل r و $r + x$ باید عددی گویا باشد. یعنی $(r + x - r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می گردد.
۳	فرض کنید که $\frac{1}{x}$ عدد گنگ نباشد. پس گویا است یعنی $(\frac{1}{x} \in Q)$ و لذا معکوس آن یعنی x باید گویا باشد و این مخلف فرض مسئله می باشد. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.
۴	فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویا است. $\alpha - \beta = m \in Q$ $\alpha + \beta = n \in Q$ } $\rightarrow 2\alpha = m + n \rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \in Q$ با فرض تناقض دارد.

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۱
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ <p>اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود.</p> $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ <p>همواره درست</p> <p>حال چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>	۲
$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۳
<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ <p>همیشه درست</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۴
<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$ <p>همیشه درست</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۵
<p>رجوع شود به پاسخ سؤال ۳</p>	۶

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times xy} x^2 + y^2 \geq 2xy \rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \rightarrow (x - y)^2 \geq 0$ <p>بدیهی است. و چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>	۷
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \xrightarrow{\times 2} a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$ $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ <p>نابرابری آخر برای دو عدد حقیقی نامنفی a و b همیشه درست است. اکنون چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند نتیجه می شود که حکم برقرار است.</p>	۸
$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ <p>گزاره همواره بدیهی است و مراحل بازگشت پذیر می باشند.</p>	۹

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عادکردن و ویژگی های آن

$\begin{aligned} a \mid 9k + 4 &\Rightarrow a \mid 5(9k + 4) \Rightarrow a \mid 45k + 20 \\ a \mid 5k + 3 &\Rightarrow a \mid 9(5k + 3) \Rightarrow a \mid 45k + 27 \end{aligned}$ $\rightarrow a \mid 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7$	۱
$5 \mid 4k + 1 \rightarrow (5)^2 \mid (4k + 1)^2 \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \quad (1)$ $5 \mid 4k + 1 \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 20k + 5 \quad (2)$ $\xrightarrow{(1), (2)} 25 \mid (16k^2 + 8k + 1) + (20k + 5) \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 28k + 6$	۲
	۳ نادرست

$\left. \begin{array}{l} a 4k + 9 \\ a 6k + 14 \end{array} \right\} \rightarrow a -6(4k + 9) + 4(6k + 14) \rightarrow a 2 \xrightarrow{a > 1} a = 2$ <p>حال اگر در رابطه‌ی $a 4k + 9$ مقدار a را برابر ۲ قرار دهیم به دست می‌آوریم $2 4k + 9$ و چون $4k + 9 = 2(2k + 4) + 1$ همواره فرد است، پس $4k + 9$ نمی‌تواند بر ۲ بخشپذیر باشد و لذا مقداری برای a با شرایط وجود ندارد.</p>	۴
$a = 4q + 3 \rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$	۵
$\left\{ \begin{array}{l} n 9k + 7 \\ n 7k + 6 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \times (-7) \\ \times 9 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} n -63k - 49 \\ n 63k + 54 \end{array} \right. \rightarrow n (-63k - 49) + (63k + 54)$ $\rightarrow n 5 \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ or \\ n = 5 \end{cases}$	۶
$\left\{ \begin{array}{l} a 3m + 1 \\ a 5m - 2 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \times 5 \\ \times 3 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} a 15m + 5 \\ a 15m - 6 \end{array} \right. \rightarrow a (15m + 5) - (15m - 6)$ $\rightarrow a 11 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 11 \end{cases}$ <p>لذا برای a دو جواب طبیعی وجود دارد.</p>	۷
$\left\{ \begin{array}{l} a 3n + 4 \\ a 2n + 3 \end{array} \right. \rightarrow a -2(3n + 4) + 3(2n + 3) \rightarrow a 1 \xrightarrow{a \in N} a = \pm 1$	۸
عدد a شمارنده‌ی عدد b است.	۹
درست	۱۰
$a 9(5k + 3) - 5(9k + 4) \rightarrow a 27 - 20 \rightarrow a 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7 \in P$	۱۱

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

درست	۱
	۲
گزینه‌ی د یعنی m^2 درست است.	۳

$\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$	۴
درست	۵
$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2$ و $B = 35a^3 = 5 \times 7 \times a^3 \rightarrow [A, B] = 105a^3$	۶
الف: متباین (نسبت به هم اول) ب: $ b $	۷
فرض می کنیم $d = (4k, 16k^2 - 1)$ در این صورت:	۸
$\left. \begin{array}{l} d 4k \\ d 16k^2 - 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} d 16k^2 \\ d 16k^2 - 1 \end{array} \right\} \rightarrow d (16k^2) - (16k^2 - 1) \rightarrow d 1$	
درست	۹
$(5a + 4, 2a + 3) = d \rightarrow \begin{cases} d 5a + 4 \\ d 2a + 3 \end{cases} \rightarrow d -2(5a + 4) + 5(2a + 3) \rightarrow d 7$ $\rightarrow d = 1 \text{ or } d = 7$	۱۰
$2m$	۱۱
نادرست	۱۲

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

عدد a عددی فرد است. بنابراین $a + 2$ عددی فرد است و $b a + 2$. بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. می دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ بعلاوه یک است. پس:	۱
$a^2 + b^2 + 3 = (\lambda m + 1) + (\lambda n + 1) + 3 = \lambda(m + n) + 5 \rightarrow r = 5$	
$\begin{cases} m = 13q_1 + 2 \\ n = 13q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ 5n = 13(5q_2) + 45 \end{cases} \rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39$ $\rightarrow 5n - 3m = 13q' + 3(13) \rightarrow 5n - 3m = 0 \rightarrow r = 0$	۲
باقیمانده ۸ و خارج قسمت -۹ است.	۳
$\begin{cases} a = 5q_1 + 2 \\ a = 6q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a = 30q_1 + 12 \\ 5a = 30q_2 + 15 \end{cases} \rightarrow a = 30q - 3 \rightarrow a = 30r + 27$	۴

$a = 31q + 19 \xrightarrow{\times 2} 2a = 31(2q) + 38 \xrightarrow{-1} 2a - 1 = 31(2q) + 37$ $\rightarrow 2a - 1 = 31(2q) + 31 + 6 \rightarrow 2a - 1 = 31(2q + 1) + 6 \rightarrow 2a - 1 = 31k + 6$ $\rightarrow r = 6$	۵
<p style="text-align: right;">هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:</p> <p>$p = 6k$ (۱)</p> <p>$p = 6k + 1$ (۲)</p> <p>$p = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ (۳)</p> <p>$p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ (۴)</p> <p>$p = 6k + 4 = 2(3k + 2)$ (۵)</p> <p>$p = 6k + 5$ (۶)</p> <p>در حالات ۱ و ۳ و ۵ نشان می دهد که p زوج است و در حالات ۲ بر ۳ بخش پذیر است. که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ و ۴ می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود.</p>	۶
$\left. \begin{array}{l} m = 17q + 5 \\ n = 17q' + 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2m - 5n = 2(17q + 5) - 5(17q' + 3) = 17(2q - 5q') - 5$ $\rightarrow 2m - 5n = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \rightarrow r = 12$	۷
$\left. \begin{array}{l} a = 17q + 5 \\ b = 17q' + 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2a - 5b = 2(17q + 5) - 5(17q' + 3)$ $\rightarrow 2a - 5b = 2(17q) - 5(17q') + 10 - 15 = 2(17q) - 5(17q') - 5$ $\rightarrow 2a - 5b = 17(2q - 5q') - 17 + 12 = 17(2q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \rightarrow r = 12$	۸

۹	<p>عدد p به یکی از صورتهای زیر نوشته می شود.</p> <p>(۱) $p = 4k$</p> <p>(۲) $p = 4k + 1$</p> <p>(۳) $p = 4k + 2$</p> <p>(۴) $p = 4k + 3$</p> <p>در حالت های (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.</p>
۱۰	<p>طبق الگوریتم تقسیم وقتی خارج قسمت تقسیم a بر ۳ باشد. در این صورت یکی از حالت های زیر را داریم:</p> <p>$a = 3k$</p> <p>$a = 3k + 1 \rightarrow a + 2 = 3(k + 1)$</p> <p>$a = 3k + 2 \rightarrow a + 4 = 3(k + 2)$</p> <p>که در هر مورد بر ۳ بخش پذیر هستند.</p>

افراز مجموعهی اعداد صحیح

۱	نادرست
۲	

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهستی و ویژگی های آن

۱	$1 \dots \overset{\gamma}{\equiv} 6 \xrightarrow{6 \equiv -1} 1 \dots \overset{\gamma}{\equiv} -1 \rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \equiv (-1)^{\overset{\gamma}{13}} \rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \equiv -1$ $\rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \times 12 \equiv -1 \times 12 \rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \times 12 \equiv -12$ $\rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \times 12 + 10 \equiv -2$ $\rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \times 12 + 10 \equiv -2 + 7 \rightarrow (1 \dots)^{\overset{\gamma}{13}} \times 12 + 10 \equiv 5 \rightarrow r = 5$
---	---

۲	<p>روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم. ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله‌ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است. که روی هم ۱۳۱ روز می شوند. حال باقی مانده‌ی تقسیم ۱۳۱ بر ۷ را تعیین می کنیم که برابر ۵ است. لذا ۱۲ بهمن متناظر با روز پنجشنبه است.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>شنبه</th> <th>یک شنبه</th> <th>دوشنبه</th> <th>سه شنبه</th> <th>چهارشنبه</th> <th>پنجشنبه</th> <th>جمعه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">۰</td> <td style="text-align: center;">۱</td> <td style="text-align: center;">۲</td> <td style="text-align: center;">۳</td> <td style="text-align: center;">۴</td> <td style="text-align: center;">۵</td> <td style="text-align: center;">۶</td> </tr> </tbody> </table>	شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه									
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶									
۳	<p>الف : درست ب : درست</p>														
۴	<p>چهارشنبه</p>														
۵	$27 \equiv 1 \rightarrow (27)^7 \equiv (1)^7 \rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 1 + 19 \rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 20 \rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 7$														
۶	$13 \equiv -4 \rightarrow (13)^2 \equiv (-4)^2 \rightarrow (13)^2 \equiv 16 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^2 \equiv -1$ $\rightarrow (13^2)^{11} \equiv (-1)^{11} \rightarrow (13)^{22} \equiv -1 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^{22} \equiv -1 + 17 \rightarrow (13)^{22} \equiv 16$ $\rightarrow r = 16$														
۷	$a \equiv b \rightarrow m a - b \rightarrow m c(a - b) \rightarrow m ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$														
۸	$49 \equiv 4 \rightarrow 7^2 \equiv 4 \rightarrow (7^2)^2 \equiv (4)^2 \rightarrow 7^4 \equiv 16 \rightarrow 7^4 \equiv 1 \rightarrow (7^4)^7 \equiv (1)^7 \rightarrow 7^{28} \equiv 1$ $\xrightarrow{7^2 \equiv 4} 7^{28} \times 7^2 \equiv 1 \times 4 \rightarrow 7^{30} \equiv 4$														
۹	<p>رقم یکان هر عدد طبیعی برابر باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است. می دانیم که $32 \equiv 2$ پس :</p> $2^5 \equiv 2 \rightarrow (2^5)^2 \equiv (2)^2 \rightarrow 2^{10} \equiv 4 \rightarrow 2^{10} \times 2 \equiv 4 \times 2 \rightarrow 2^{11} \equiv 8$ $\rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 8 + 7 \rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \xrightarrow{15 \equiv 5} 2^{11} + 7 \equiv 5$ <p>لذا رقم یکان برابر ۵ است.</p>														

$a \equiv b \rightarrow m a - b \rightarrow m (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ $\rightarrow m a^n - b^n$	۱۰
$\begin{cases} 38 \equiv 0 \\ 19 \equiv 3 \end{cases} \xrightarrow{4} 38 \equiv 0 + 3 \rightarrow 38 \equiv 3$	۱۱
$1 \dots \equiv -1 \rightarrow (1 \dots)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \rightarrow (1 \dots)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \rightarrow r = 2$	۱۲
	درست ۱۳
$4a - 7 \equiv 3a - 5 \rightarrow a \equiv 2 \rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \rightarrow 9a + 6 \equiv 4 \rightarrow r = 4$	۱۴

معادله‌ی همبستگی

$3x \equiv 13 \rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \rightarrow x = 7k + 2$	۱
$4x \equiv 17 \rightarrow 4x \equiv 15 + 2 \rightarrow 4x \equiv 2 \rightarrow 4x \equiv 2 + 10 \rightarrow 4x \equiv 12$ $\xrightarrow{(4,5)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = 5k + 3$	۲
	نادرست ۳
$2 \equiv 35 \xrightarrow{11} 5x \equiv 2 \xrightarrow{(5,11)=1} x \equiv 7 \rightarrow x = 11k + 7$	۴
	نادرست، معادله‌ی $2x \equiv 10$ دارای جواب است در حالی که $(2, 10) = 2$ و $2 \nmid 3$ ۵
$8x \equiv 20 \rightarrow 8x \equiv 20 + 12 \rightarrow 8x \equiv 32 \xrightarrow{(8,12)=4} x \equiv 4 \rightarrow x = 3k + 4$	۶
$7x \equiv 1 \rightarrow 7x \equiv 4 \times 5 + 1 \rightarrow 7x \equiv 21 \xrightarrow{(7,4)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = 4k + 3$	۷
	نادرست ۸

معادله‌ی سیاله

$\begin{aligned} \delta x + 2y = 18 &\rightarrow 2y \equiv 18 \xrightarrow{(2, \delta)=1} y \equiv 9 \rightarrow y \equiv \delta + 4 \rightarrow y \equiv 4 \xrightarrow{k \in Z} y = \delta k + 4 \\ \delta x + 2y = 18 &\xrightarrow{y = \delta k + 4} \delta x + 2(\delta k + 4) = 18 \rightarrow x = -2k + 2 \end{aligned}$	۱
$\begin{aligned} 7x \equiv 11 &\rightarrow 7x \equiv 11 + 2 \times 5 \rightarrow 7x \equiv 21 \xrightarrow{(7, \delta)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = \delta k + 3 \quad k \in Z \\ 7x + 5y = 11 &\xrightarrow{x = \delta k + 3} 7(\delta k + 3) + 5y = 11 \rightarrow y = -7k - 2 \quad k \in Z \end{aligned}$	۲
$2x + 5y = 29 \rightarrow 2x \equiv 29 \rightarrow 2x \equiv 4 \rightarrow x = \delta k + 2 \rightarrow y = \delta k + 2$	۳
$\begin{aligned} 13y \equiv 7 &\xrightarrow{13 \equiv 4, 7 \equiv 16} 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4, 9)=1} y \equiv 4 \\ \rightarrow y = 9k + 4, & \quad x = -13k - 5 \end{aligned}$	۴
<p>الف : معادله دارای جواب است. $\rightarrow 1 19, (4, 3) = 1$</p> <p>ب :</p> $\begin{aligned} 4x + 3y = 19 &\rightarrow 4x \equiv 19, 19 \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \rightarrow 4x \equiv 4 \\ \rightarrow x \equiv 1 &\rightarrow x = 3k + 1 \quad k \in Z \\ 4x + 3y = 19 &\xrightarrow{x = 3k + 1} 4(3k + 1) + 3y = 19 \rightarrow 3y = -12k + 15 \\ \xrightarrow{\div 3} &y = -4k + 5 \end{aligned}$	۵
$2x \equiv 19 \xrightarrow{19 \equiv 4} 2x \equiv 4 \xrightarrow{(2, \delta)=1} x \equiv 2 \rightarrow x = \delta k + 2 \rightarrow y = -2k + 3$	۶
$\begin{aligned} 2y \equiv 18 &\xrightarrow{(2, \delta)=1} y \equiv 9 \rightarrow y \equiv 4 \rightarrow y = \delta k + 4 \\ \delta x + 2y = 18 &\rightarrow \delta x + 2(\delta k + 4) = 18 \rightarrow x = -2k + 2 \end{aligned}$	۷

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

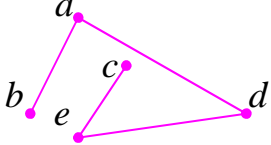
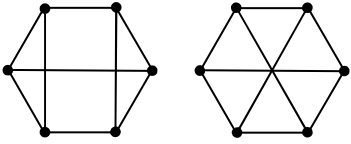
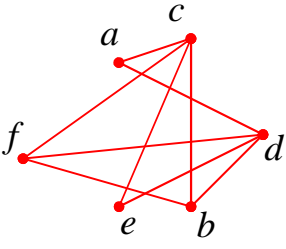
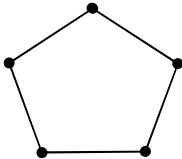
فصل دوّم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

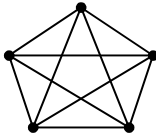
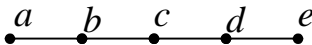
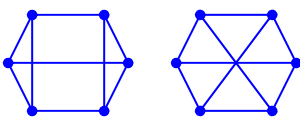
درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

۱	الف : نادرست ب : درست
۲	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : درجه‌ی رأس a $\deg(a) = 5$ ت : خیر ، زیرا برای مثال از f به a مسیری وجود ندارد. ث :
۳	اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت. $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است. از طرفی عدد B نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید.) در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.
۴	الف : $N_G(d) = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$
۵	$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$
۶	۲۸

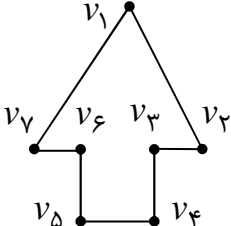
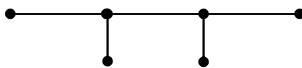
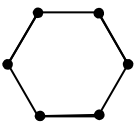
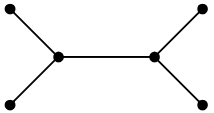
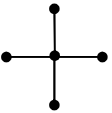
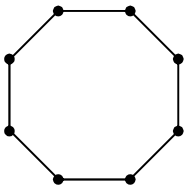
۷	الف: $p=6$ و $q=7$ ج: $N_G(b) = \{a, b, c\}$ ب
۸	$\frac{p(p-1)}{2} = \text{تعداد یالهای گراف } G + \text{تعداد یالهای گراف } \bar{G}$ $7 + \text{تعداد یالهای گراف } \bar{G} = 15 \rightarrow \text{تعداد یالهای گراف } \bar{G} = 8$ لذا مجموع درجه های رئوس گراف \bar{G} برابر ۱۶ است.
۹	الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ ب: $abca$ یا $bcd b$ ج: درجهی رأس c در گراف مکمل ۳ خواهد بود.
۱۰	نادرست
۱۱	n رأسی
۱۲	الف: ب: $N_G[b] = \{a, b, c\}$ ج: b, a, e, f, c, d
۱۳	الف: ب:
۱۴	نادرست
۱۵	الف: $\delta(G) = 1$ ب: $q = 6$ پ: $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$ ت: $x = c$

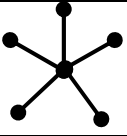
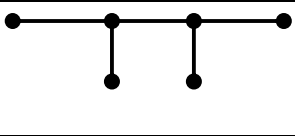
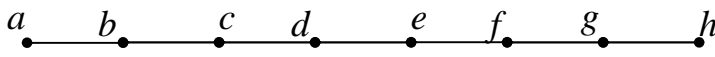
<p>الف : گرافی از مرتبه n که در جهی تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k، $(0 \leq k \leq n)$ باشد.</p> <p>ب : وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم $5 \times 3 = 2q \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ که تناقض است.</p>	۱۶
<p>الف : a, c, d, b, e, a</p> <p>ب :</p> 	۱۷
<p>الف : دو برابر</p> <p>ب : k</p>	۱۸
<p>الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$</p> <p>ب : دور به طول ۴ یا $(abeda)$ یا $(adeba)$</p> <p>پ : مسیر به طول ۳ $(aebc)$ و مسیر به طول ۴ $(adebc)$</p>	۱۹
<p>$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \rightarrow 9 + 12 = p - 1 \rightarrow p = 22$</p>	۲۰
<p>الف : $3 \times 6 = 2q \rightarrow q = 9$</p> <p>ب : رسم یک گراف کافی است.</p> 	۲۱
<p>به جواب سئوال ۳ رجوع کنید.</p>	۲۲
<p>الف : مرتبه</p> <p>ب : مسیر</p> <p>پ : $\frac{n(n-1)}{2}$</p> <p>ت : دور</p>	۲۳
<p>الف : $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$</p> <p>ب : $bafeb$</p> <p>پ :</p> <p>ت : $N_G(e) = \{a, b, f\}$</p> 	۲۴
<p>الف :</p>  <p>ب : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد گراف باید زوج باشد.</p>	۲۵

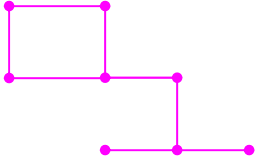
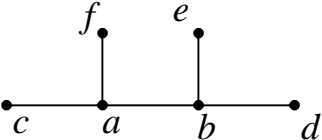
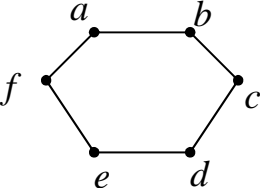
الف : $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$	ب : $cab c$ و $caec$ و $cedc$	۲۶
پ : ۵	ت : $N_G(e) = \{a, c, d\}$	ث : خیر
۲۷	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$ 	
۲۸	$\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \rightarrow 3 \times 7 = 2q \rightarrow 21 = 2q$ <p>و این یعنی ۲۱ عدد زوج است که ممکن نیست. همین جا نتیجه گرفته می شود که چنین گرافی وجود ندارد.</p>	
۲۹	الف : $abcd$ و $bcde$	
۳۰	 <p>الف : رئوس ب : طوقه پ : مجاور ت : زوج</p>	
۳۱	الف : ۳	
۳۲	ب : ۴	
۳۳	الف : گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با مساوی و برابر با عدد k باشد.	
۳۴	ب : ۳	
۳۵	پ : بله	
۳۳	الف : $N_G(c) = \{a, e, d\}$ (ب) رأس f ، ۵ (پ) $abecda$ (ت) خیر	
۳۴	الف : $abgc$ ب : $bc d gb$ پ : ۵	
۳۵	ت : خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است و هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد. ث : $N_G(f) = \{\}$	
۳۵	$q = 2p - 3 \rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \rightarrow p = 6$ 	

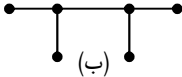
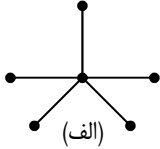
درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

۱	الف : $\{b, e, h, k\}$	ب : $\{a, c, e, g, i, k\}$
۲	الف : ۳ رأس	ب : $p - ۱$
۳	الف : $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ب : $\gamma(G) = ۳$ ج : $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$	
۴	الف : اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم. ب : $A = \{h, g, f, i, j\}$	
۵	الف : ب :	 
۶	۲	
۷	الف: درست	ب : درست
۸	الف : ب : ج :	  

$\Delta(G) = 4$ $\text{حداکثر تعداد یالها} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ $\text{حداقل تعداد یالها} = n - 1 = 5 - 1 = 4$	۹
<p>الف: $\{f, d\}$ ب: $\{e, f, g, h\}$</p>	۱۰
<p>۱۱ الف) زیر مجموعه‌ی D از مجموع رئوس گراف G را مجموعه‌ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد. ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم گراف G را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم .</p>	۱۱
<p>الف) $\{c, f, h, j\}$ ب) $\{a, b, f, h\}$ پ) $\{c, f, h\}$</p>	۱۲
<p>۱۳ الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ از طرفی مجموعه‌ی $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. بنابراین $\gamma(G) = 2$ است و مجموعه‌ی $\{a, g\}$ همان 2-مجموعه است. ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$ از طرفی مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین $\gamma(G) = 4$ است و مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ همان 4-مجموعه است.</p>	۱۳
<p>الف)  (الف)</p> <p>ب)  (ب)</p>	۱۴
<p>الف: </p> <p>ب: $\{a, d, g\}$ ج: $\{a, d, e, h\}$</p>	۱۵
<p>۱۶ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف رأس a از آن ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال به دست آید.</p>	۱۶
<p>۱۷ الف: مجموعه‌ی احاطه گر برابر ۴ عضو مانند $\{c, f, h, g\}$ ب: احاطه گر مینیمال مانند $\{c, f, g\}$</p>	۱۷

<p>الف : برای مثال اگر $n = 10$ ، رسم C_3 یا P_3 کافی است. در این گراف ها $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$</p> <p>ب : در گرافی مشابه گراف زیر $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2$ است ولی $\gamma(G) = 3$ می باشد.</p> 	<p>۱۸</p>
<p>الف : مینیمم ب : مینیمال</p>	<p>۱۹</p>
<p>الف : گراف روبرو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است.</p>  <p>ب : گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه گری به اندازه ۲ است که عبارتند از $\{e, b\}$ و $\{f, c\}$ و $\{a, d\}$</p> 	<p>۲۰</p>
<p>برای گراف مورد سؤال داریم:</p> $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)$ <p>از طرفی مجموعه‌ی $\{g, h, d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه برای گراف، لذا: $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$</p>	<p>۲۱</p>
<p>$\Delta = 3$ و $n = 8$ و $\left\lceil \frac{8}{3 + 1} \right\rceil = 2 \leq \delta(G)$</p> <p>مجموعه های $\{a, g\}$ یا $\{b, h\}$ یا $\{c, e\}$ یا $\{d, f\}$ مجموعه‌ی احاطه گر دو عضوی هستند.</p> <p>بنابراین $\delta(G) = 2$</p>	<p>۲۲</p>
<p>یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر مینیمال می نامیم.</p>	<p>۲۳</p>

<p>با توجه به اینکه $\left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$، لذا داریم $\delta(G) \geq 2$</p> <p>پس حداقل عدد احاطه گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. پس $\lambda(G) = 2$</p>	۲۴
<p>الف: $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$</p> <p>ب: $2 = \left\lceil \frac{7}{4+1} \right\rceil$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ از سوی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ از این دو نتیجه می توان نوشت که $\gamma(G) = 2$</p>	۲۵
<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم، مجموعه‌ی احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مجموعه‌ی احاطه گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم عضوهای بیشتری داشته باشد.</p>	۲۶
<p>$D = \{a, c, i, d\}$ توجه داشته باشید که این مجموعه تنها جواب این مسئله نمی باشد.</p>	۲۷
<p>طبق قضیه داریم: $2 \leq \gamma(G) = \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil$ از طرفی مجموعه‌ی $D = \{e, j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گراست. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$</p>	۲۸
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> </div>	۲۹
<p>طبق قضیه‌ی داریم $2 \leq \gamma(G) = \left\lceil \frac{7}{4+1} \right\rceil$. از طرفی مجموعه‌ی $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$</p>	۳۰
<p style="text-align: right;">$D = \{a, e, c, h\}$</p>	۳۱

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۱
الف) $5! \times 6!$ ب) $5! \times 7!$ ج) $10! \times 2!$	۲
$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$	۳
الف: $4! \times 6!$ ب: $5! \times 4!$ ج: $3! \times 7!$	۴
الف: $6! \times 5!$ ب: $6! \times 5! \times 2!$	۵
الف: $4! \times 3!$ ب: $4! \times 4!$	۶
الف: $3! \times 3!$ ب: $2! \times 4!$	۷
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 7!$	۸
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 5!$	۹

معادلات حسابی

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۱
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ $x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\rightarrow x_1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 + x_4 + 1 + x_5 + 1 = 10$ $\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی</p>	۲

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ $\frac{x_1 = y_1 + 3, \quad x_5 = y_5 + 4}{\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 12}$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$</p>	۳
<p style="text-align: right;">(الف)</p> $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ <p>(ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می داریم. $8 - 4 = 4$ شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم. لذا تعداد حالات برابر است با: $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$</p>	۴
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با: $\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$</p>	۵
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + (y_3 + 4) + x_4 + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با: $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$</p>	۶
$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, \quad x_2 \geq 2, \quad x_5 \geq 4$ $x_2 = y_2 + 2 \quad \text{و} \quad x_5 = y_5 + 4$ $x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) = 11 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ <p>جواب صحیح و نامنفی $\binom{5+5+1}{5-1} = \binom{9}{4}$</p>	۷

<p> $x_1, x_3, x_4 \geq 1$ و $x_2 \geq 3$ و $x_5 \geq 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ $\rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 3) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 4) = 17$ $\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$. <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ $x_2 > 2 \rightarrow x_2 - 2 > 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 2$ $x_5 > 3 \rightarrow x_5 - 3 > 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 3$ $\rightarrow x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 3) = 17$ $\rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 12$ تعداد جواب های طبیعی $\binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$. </p>	۸
<p> $y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 1$ $y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \rightarrow x_3 = y_3 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 1) + x_2 + (y_3 + 4) + \dots + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + \dots + x_5 = 9$ تعداد جوابهای صحیح و نامنفی $= \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715$ </p>	۹
<p> $y_2 = x_2 - 3$, $y_2 \geq 0$ و $x_5 = 2$ $x_1 + (y_2 + 3) + x_3 + x_4 + 2 + x_5 = 17 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی $\binom{16}{4} =$ </p>	۱۰

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \quad : \quad x_1 \geq 1, x_4 > 3, x_6 = 1$ $y_1 = x_1 - 1 : y_1 \geq 0$ $y_4 = x_4 - 4 : y_4 \geq 0$ $y_6 = 1$ $y_1 + 1 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 + 1 = 12 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 6$ جواب $\binom{10}{4} = 210$	۱۱
$y_1 = x_1 - 3 ; y_1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 3$ $y_4 = x_4 - 4 ; y_4 \geq 0 \rightarrow x_4 = y_4 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + (y_4 + 4) + x_5 = 15$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$ جواب $\binom{12}{4} = 495$	۱۲

جایگشت های با تکرار

$p = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 3 \times 7!$	۱
روش اول $\binom{9}{2,3,4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$ روش دوم $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{4! \times 0!} = 36 \times 35 \times 1 = 1260$	۲
۴	۳
$\binom{8}{4,2} = \frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 1 \times 2} = 14$	۴
$\binom{7}{2,3,1,1} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 1! \times 1!} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 42$	۵

$\binom{10}{4,1,3,2} = \frac{10!}{4! \times 1! \times 3! \times 2!} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!}$	۶
$\binom{8}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 280$ روش دوم: $\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!} = 280$ روش اول:	۷
$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!}$ یا $\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}$	۸

مربع های لاتین

<table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> \Rightarrow <table border="1"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱																					
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															
۲	۱	۳																																															
۳	۲	۱																																															
۱	۳	۲																																															
۱۲	۳۱	۲۳																																															
۳۳	۲۲	۱۱																																															
۲۱	۱۳	۳۲																																															
۱۵	۲																																																
<table border="1"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> \Rightarrow <table border="1"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲۳</td><td>۳۲</td><td>۱۱</td></tr> </table>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۳
	ش	ی	د																																														
A	۱	۲	۳																																														
B	۳	۱	۲																																														
C	۲	۳	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۲	۱	۳																																														
B	۱	۳	۲																																														
C	۳	۲	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۱۲	۲۱	۳۳																																														
B	۳۱	۱۳	۲۲																																														
C	۲۳	۳۲	۱۱																																														
درست	۴																																																
<table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> و <table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۵																														
۲	۳	۱																																															
۱	۲	۳																																															
۳	۱	۲																																															
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															

<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> </table> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin: 0 20px;"> $\begin{aligned} & 1 \rightarrow 3 \\ & 2 \rightarrow 2 \\ \Rightarrow & 3 \rightarrow 4 \\ & 4 \rightarrow 1 \end{aligned}$ </div> <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳	۶
۴	۲	۱	۳																														
۳	۱	۲	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۲	۳	۴	۱																														
۱	۲	۳	۴																														
۴	۳	۲	۱																														
۳	۱	۴	۲																														
۲	۴	۱	۳																														
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">۱</td> <td style="padding: 0 10px;">۲</td> <td style="padding: 0 10px;">۳</td> <td style="padding: 0 10px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> </tr> </table>		۱	۲	۳	۴	C_1	T_1	T_2	T_3	T_4	C_2	T_4	T_1	T_2	T_3	C_3	T_3	T_4	T_1	T_2	C_4	T_2	T_3	T_4	T_1	۷							
	۱	۲	۳	۴																													
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4																													
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3																													
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2																													
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1																													
<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۲</td> </tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۸																							
۱۱	۲۲	۳۳																															
۳۲	۱۳	۲۱																															
۲۳	۳۱	۱۲																															
<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	۹																
۳	۲	۱	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۴	۱	۲	۳																														
۲	۳	۴	۱																														

در هیچ سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود ندارد، بنابراین مربع جدید، مربع لاتین می باشد.

این جدول یکی از پاسخ های ممکن است.

این دو مربع متعامدند، زیر در جدول تلفیقی شده از این دو مربع ، عدد تکراری وجود ندارد.

با استفاده از جایگشت مناسب مربع لاتین جدید خواهیم داشت.

(مثلاً با جایگشت $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 4$ و $4 \rightarrow 1$) مربع جدید به صورت

مقابل در خواهد آمد

۱۰ ابتدا در هر مورد، مربع های داده شده را تلفیق می کنیم. (برهم نهی)

الف :

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامدند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود ندارد.

ب :

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامد نیستند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود دارد.

۱۱ برای برنامه ریزی این مسئله کافی است، دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کنندهی ایاف است.

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 \Rightarrow

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 \Rightarrow

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع تلفیقی، عدد سمت چپ هر درایه نشان دهندهی ماشین و عدد سمت راست آن نشان دهندهی نوع ایاف است.

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۲		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<p style="text-align: center;">در مربع تلفیقی مقابل، اعداد دو رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع داده شده متعامد هستند.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱۳									
۱۱	۲۲	۳۳																	
۳۲	۱۳	۲۱																	
۲۳	۳۱	۱۲																	
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۴		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: left;"> <p>۱ → ۳ ۲ → ۱ ۳ → ۲ ((الف))</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <p>((ب))</p> <table border="1"> <tr><td style="background-color: yellow;">۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr> <tr><td>۱۳</td><td>۳۲</td><td style="background-color: yellow;">۲۱</td></tr> </table> </div> </div> <p style="text-align: center;">متعامد نیستند، زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۲۱	۱۳	۳۲	۳۲	۲۱	۱۳	۱۳	۳۲	۲۱	۱۵
۱	۳	۲																	
۲	۱	۳																	
۳	۲	۱																	
۲۱	۱۳	۳۲																	
۳۲	۲۱	۱۳																	
۱۳	۳۲	۲۱																	
$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A \ominus B = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \end{bmatrix}$	۱۶																		

الف :	۱۷
$\begin{array}{ c c } \hline ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$	
<p>ب : فقط دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد که متعامد نیستند. زیرا در مربعی تلفیقی آنها عدد تکراری وجود دارد.</p>	
$\begin{array}{ c c } \hline ۱۲ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$	

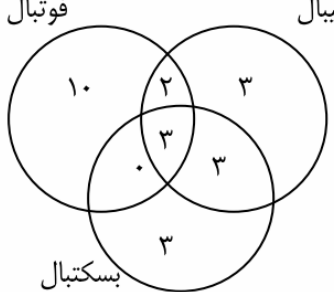
درس ۲: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۱	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند B</p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ $ S = B ^{ A } = 3^4 = 81$ $ A_1 = A_2 = A_3 = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} $ $= S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16) + (3 \times 3) - 0 = 36$
۲	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{90}{2} \right] + \left[\frac{90}{3} \right] - \left[\frac{90}{6} \right]$ $= 45 + 30 - 15 = 60$

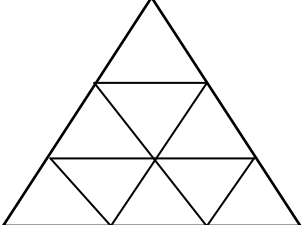
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{3} \right] - \left[\frac{200}{12} \right]$ $= 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$	۳
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابع همه اعضای B باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از A نسبت داده شود).</p> <p>پس جواب این مسئله می شود:</p> $ A = 4 \text{ و } B = 3$ $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$	۴
<p>مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۴ را A و مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۷ را B می نامیم. بنابراین:</p> $n(A) = \left[\frac{400}{4} \right] = 100 \text{ و } n(B) = \left[\frac{400}{7} \right] = 57 \text{ و } n(A \cap B) = \left[\frac{400}{4 \times 7} \right] = 14$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 14 = 86$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B - A)$ $= 100 - 14 + 57 - 14 = 129$	۵
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{350}{4} \right] + \left[\frac{350}{6} \right] - \left[\frac{350}{12} \right]$ $= 87 + 58 - 29 = 116$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 350 - 116 = 234$	۶
درست	۷

<p> $1 \leq j \leq 3$, $A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}$ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ $S = 3^4$ و $A_1 = A_2 = A_3 = 2^4$ و $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1^4$ و $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0^4 = 0$. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_3 - A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45$ $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - 45 = 36$ روش دوم : $A = 4$ و $B = 3$ $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$ </p>	۸
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ی ۴ عضوی مجموعه ای ۸ عضوی</p> $({}_8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$	۹
<p> $A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \rightarrow A = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$ $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \rightarrow B = \left[\frac{100}{10} \right] = 10$ $A \cap B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \rightarrow A \cap B = \left[\frac{100}{30} \right] = 3$ $A \cup B = A + B - A \cap B = 16 + 10 - 3 = 23$ </p>	۱۰
<p> $S = 200$ و $A = \left[\frac{200}{2} \right] = 100$ و $B = \left[\frac{200}{7} \right] = 28$ و $A \cap B = \left[\frac{200}{14} \right] = 14$ $A \cup B = A + B - A \cap B = 100 + 28 - 14 = 114$ $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = S - A \cup B = 200 - 114 = 86$ </p>	۱۱

<p>الف : $3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 45 = 36$</p> <p>ب : $(6)_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$</p>	<p>۱۲</p>
<p>حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع ممکن از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی است که برابر با 8^2 است.</p>	<p>۱۳</p>
<p>$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120$</p>	<p>۱۴</p>
<p>$F \cup V = S - F \cup V = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$</p>	<p>۱۵</p>
<p>$A = \{n \in S \mid n = 5k, k \in Z\} \rightarrow n(A) = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$</p> <p>$B = \{n \in S \mid n = 7k, k \in Z\} \rightarrow n(B) = \left[\frac{400}{7} \right] = 57$</p> <p>$A \cap B = \{n \in S \mid n = 35k, k \in Z\} \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{400}{35} \right] = 11$</p> <p>$A \cup B = A + B - A \cap B = 80 + 57 - 11 = 126$</p> <p>$\overline{A \cup B} = S - A \cup B = 400 - 126 = 274$</p>	<p>۱۶</p>
<p>فوتبال والیبال</p>  <p>بسکتبال</p> <p>فقط در یک رشته = $10 + 3 + 3 = 16$</p>	<p>۱۷</p>
<p>الف) $3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36$</p> <p>ب) $P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$</p>	<p>۱۸</p>

$A = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 4k\} \rightarrow A = \left[\frac{200}{4} \right] = 50$ $B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 7k\} \rightarrow B = \left[\frac{200}{7} \right] = 28$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 28k\} \rightarrow A \cap B = \left[\frac{200}{28} \right] = 7$ $ A \cap B' = A - A \cap B = 50 - 7 = 43$	۱۹
---	----

اصل لانه کبوتری

$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $\begin{array}{r} 6 \quad \quad 4 \\ 4 \quad \quad 1 \\ \hline 2 \\ 1+1=2 \end{array}$ </div> <div> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد. ($n = 365$)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با $kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$</p> </div> </div>	۱
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> $7 \times 12 = 84$ $6 + 1 = 7$ </div> <div style="width: 50%;"> <p>تعداد کبوترها : ۵۰۵ دانش آموز</p> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $\begin{array}{r} 50.5 \quad \quad 84 \\ 50.4 \quad \quad 6 \\ \hline 1 \end{array}$ </div> <div> <p>طبق اصل لانه کبوتر لاقل ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p> </div> </div>	۲
<p>در این مسئله $k + 1 = 7$ یعنی $k = 6$ است و تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n = 12$ است. طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش آموزان، حداقل باید برابر $kn + 1 = (6 \times 12) + 1 = 73$ باشد.</p>	۳
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع (با ضلع‌هایی به طول ۱ واحد) تقسیم می کنیم.</p> <p>حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث‌های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث‌ها ۱ واحد می باشد، فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است.</p> </div> </div>	۴

تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر	تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه	۵
طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می گیرند. پس :		
$\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \rightarrow AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$		
تعداد کبوترها برابر ۴۳ و تعداد لانه ها برابر ۴۲ می باشد و می توان لانه ها را به صورت زیر در نظر گرفت:		۶
$\begin{matrix} \text{نقطه} & , & \text{نقطه} & , & \text{نقطه} & , & \dots & , & \text{نقطه} \\ ۱,۸۴ & & ۲,۸۳ & & ۳,۸۲ & & & & ۴۲,۴۳ \end{matrix}$		
چنانچه قرار باشد، کبوترها، لانه ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعشان ۸۵ است.		
در این مسئله $k + 1 = 7$ پس $k = 6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn + 1 = (6)(12) + 1 = 73$ باشد.		۷
$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ و $n = 7$ تعداد لانه ها		۸
$nk + 1 = (7)(19) + 1 = 133 + 1 = 134$ تعداد کبوترها		
بنابراین حداقل ۱۳۴ نفر باید در سالن باشند.		
هر فصل تولد را لانه فرض می کنیم که برابر ۴ است. همچنین هر فرد خانواده را معادل کبوتر قرار می دهیم که برابر ۵ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می گیرند. به عبارتی دیگر در یک فصل به دنیا آمده اند.		۹
$k + 1 = 3 \rightarrow k = 2$ ، $32 \times 31 = 992$ تعداد لانه ها		۱۰
$2 \times 992 + 1 = 1985$ تعداد کبوترها		
$k + 1 = 5 \rightarrow k = 4$		۱۱
$kn + 1 = 54 \rightarrow 4n = 53$		
$n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13$		

$$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19 \rightarrow kn + 1 = 19(17) + 1 = 134$$

۱۲

فصل اول

((ریاضیات گسسته))



درس ۱: استدلال ریاضی

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n حاصل $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر $a > 0$ باشد، آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ پ) مربع هر عدد فرد، فرد است. ت) عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^3 < x^2$	۲
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر n عددی فرد باشد، ثابت کنید حاصل $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است. (خارج کشور)	۳
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه ی مثال نقض کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است. ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۴
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	a_1 و a_2 و a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1 و b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.	۵
۰/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است.	۶
۱ نمره	دی ۱۴۰۱	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. « برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »	۷
۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۸

سؤالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایهی دوازدهم ریاضی و فیزیک

۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	اگر x و y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$	۹
۰/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را تعیین کنید. حاصل ضرب هر دو عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱۰
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	برای هر دو عدد حقیقی x و y ، به روش بازگشتی (گزاره های هم ارزی) نشان دهید: $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$	۱۱

فصل اول

((ریاضیات گسسته))



درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $ a > b $ ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b و عدد طبیعی c اگر $(a c, b c)$ و $[a, b] = c$ آنگاه $(a m, b m \rightarrow c \leq m)$ پ) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر عدد مانند k در Z باشد، بطوری که $4k + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید، $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$	۲
۰/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. (خارج کشور) الف) اگر $a b$ و $b a$ آنگاه a برابر با است. $(\pm b, b)$ ب) اگر $(a, b) = d$ ، آنگاه برای هر $m > 0$ که $m a$ و $m b$ داریم. $(m \geq d \text{ و } m \leq d)$	۳
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	اگر $a > 1$ و $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است. (خارج کشور)	۴
۰/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $5k + 9$ و $8k + 13$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$	۵
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.	۶
۰/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$	۷
۰/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید. الف: حاصل $([m^2, m], m^5)$ ، برابر با است. ب: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم، $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b هستند.	۸
۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $5m + 4$ و $6m + 5$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید، $a = \pm 1$	۹

سؤالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایهی دوازدهم ریاضی و فیزیک

۱ نمره	دی ۱۴۰۱	اگر a و b دو عدد صحیح و فرد باشند. در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 5$ را بر ۸ بیابید.	۱۰
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۲	اگر $a \mid 2m + 3$ و $a \mid m + 7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟	۱۱
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	باقی مانده‌ی تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می باشد، باقی مانده‌ی تقسیم a برابر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)	۱۲
۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل $(3m + 1, 3m + 2)$ برابر ۱ می باشد. $(m \in Z)$	۱۳
۰/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف) برای اعداد صحیح a و b و c که $a \neq 0$ ، اگر $a \mid b + c$ آن گاه $a \mid b$ یا $a \mid c$ ب) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، آنگاه می گوئیم؛ a و b ، نسبت به هم اول اند.	۱۴
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۲	به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $a + 2 \mid b$ ، آنگاه b نیز عددی فرد است.	۱۵
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $7 \mid 2k + 1$ ، ثابت کنید. $49 \mid 4k^2 - 10k - 6$	۱۶

فصل اول

((ریاضیات گسسته))



درس ۲: هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربرد ها

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	باقی مانده تقسیم عدد $18 + 27^{20}$ را بر ۱۳ بیابید.	۲
۰/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟	۳
۰/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. (خارج کشور) الف) معادله هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a, m) b$ ب) اگر برای دو عدد صحیح x و k داشته باشیم: $x = 4k + 3$ آنگاه $x \in [3]_4$ ، $x \in [4]_3$	۴
۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	بدون انجام عمل تقسیم باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر ۹ تعیین کنید. (خارج کشور)	۵
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی است؟ (خارج کشور)	۶
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	همه‌ی اعداد صحیح مانند a را بیابید که ۵ برابر آنها بعلاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشند. (خارج کشور)	۷
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	ثابت کنید باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۹، با باقی مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ برابر است.	۸
۱/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است. اول به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد یا امتیازی ندارد.) این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟	۹
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	باقی مانده‌ی تقسیم عدد $200! + 199! + 198! + \dots + 2! + 1!$ را بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد.)	۱۰

سؤالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم ریاضی و فیزیک

۱ نمره	دی ۱۴۰۱	معادله‌ی همنهشتی $۴x \equiv ۱۰ \pmod{۶}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه‌ی جواب آن را به دست آورید.	۱۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	در معادله‌ی سیاله‌ی $۱۵x + ۱۹y = ۷$ ، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد. (با راه حل)	۱۲
۰/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ ، دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a, m) b$.	۱۳
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۲	باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = ۶۳^{۱۴} + ۱$ را بر ۱۶ به دست آورید.	۱۴
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	معادله‌ی هم نهشتی $۱۴۰۲x \equiv ۱۱ \pmod{۹}$ را حل کنید.	۱۵

فصل دوم

((ریاضیات گسسته))

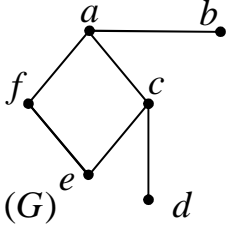


درس ۱: گراف

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید. الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس می نامیم. ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشند و هیچ یالی نداشته باشد، گراف می نامیم. پ) تعداد یال های گراف K_n ، برابر با است. ت) گراف G را می نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	 <p>الف) گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید. ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.</p>	۲
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید. (خارج کشور) الف) به رأسی که درجه ی آن صفر است، یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس می گوییم. ب) اگر یک یال ، یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید، به آن یال گفته می شود. پ) هرگاه بین هر دو رأس یک گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، آن گراف را می نامیم. ث) تعداد رأس های فرد هر گراف است.	۳
۲/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	 <p>با توجه به گراف G (شکل زیر) به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) $\Delta(G)$ را تعیین کنید. ب) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. پ) یک دور به طول ۵ برای a بنویسید. ت) درجه ی رأس c در گراف مکمل چند است؟ ث) یک زیر گراف با سه یال رسم کنید.</p>	۴
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف را مشخص کنید. (خارج کشور)	۵

۲/۲۵ شهریور نمره ۱۴۰۱	۶	<p>با توجه به گراف (G) (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.</p> <p>ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>پ) درجهی رأس a را در گراف \overline{G} تعیین کنید.</p> <p>ت) آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل)</p> <p>ث) $N_G[f]$ را بنویسید.</p>
۰/۲۵ دی نمره ۱۴۰۱	۷	<p>در جای خالی عبارت های مناسب بنویسید.</p> <p>تعداد یال های گراف k_7 ، برابر است.</p>
۲ دی نمره ۱۴۰۱	۸	<p>در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.</p> <p>الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم.</p> <p>ب) گرافی را همد می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد.</p> <p>پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\overline{G})$ برابر با $(\frac{n(n-1)}{2}, n(n-1))$ است.</p> <p>ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.</p>
۱/۵ دی نمره ۱۴۰۱	۹	<p>گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:</p> <p>الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.</p> <p>ب) دوری به طول ۴ بنویسید.</p> <p>پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید.</p> <p>ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.</p>
۰/۲۵ خرداد نمره ۱۴۰۲	۱۰	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است.</p>
۱ خرداد نمره ۱۴۰۲	۱۱	<p>به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم ، چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل)</p>
۰/۷۵ خرداد نمره ۱۴۰۲	۱۲	<p>گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) مجموعهی $N_G(g)$ را بنویسید.</p> <p>ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.</p> <p>ج) درجهی رأس c در گراف \overline{G} (مکمل گراف G) را مشخص کنید.</p>

سئالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم ریاضی و فیزیک

<p>۱ نمره</p>	<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم. ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی است. ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه‌ی p برابر است. د) گرافی را که درجه‌ی تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف می‌گوییم.</p>	<p>۱۳</p>
<p>۲/۵ نمره</p>	<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سئالات زیر پاسخ دهید. الف) مرتبه و اندازه‌ی آن را بنویسید. ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید. ج) مجموعه‌ی $N_G[c]$ را بنویسید. د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید. هـ) حاصل $q(\overline{G}) + \deg_{\overline{G}}(g)$ عبارت را به دست آورید.</p> 	<p>۱۴</p>

فصل دوم

((ریاضیات گسسته))

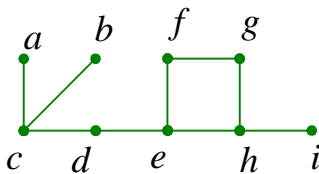
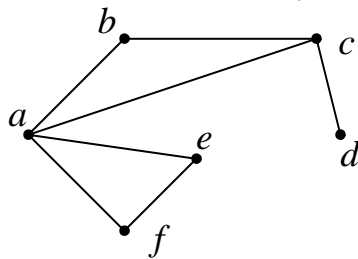
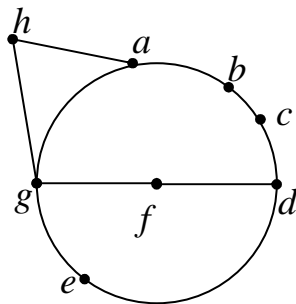


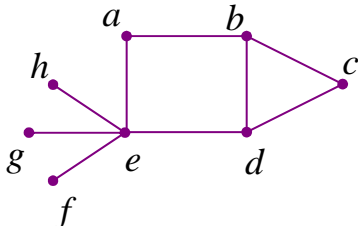
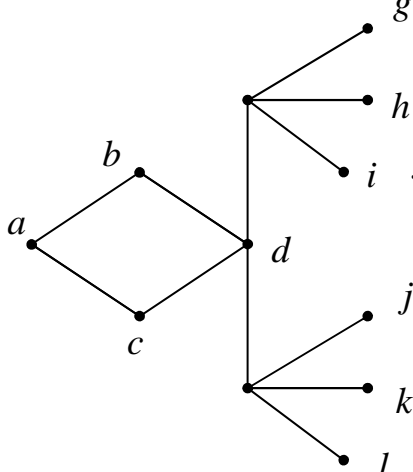
درس ۲: مدل سازی با گراف

۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱		الف) مجموعه احاطه گر مینیمال را تعریف کنید. ب) برای گراف شکل روبرو، یک مجموعه‌ی احاطه گر با ۴ عضو انتخاب کنید.	۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱		عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید.	۲
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱		ابتدا گراف P_q را رسم کنید. سپس یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم از آن را مشخص کنید.	۳
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱		الف) یک γ - مجموعه مشخص کنید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.	۴
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱		عدد احاطه گرای گراف شکل مقابل را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید. (خارج کشور)	۵

سوالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایهی دوازدهم ریاضی و فیزیک

۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	به سوالات زیر پاسخ داده و برای آنها دلیل ارائه کنید. الف) یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟ ب) در یک گراف از مرتبه‌ی ۸ با $\Delta = 3$ ، حداقل چند رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است؟	۶
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	به سوالات زیر پاسخ دهید: الف) گراف C_8 را رسم کنید. ب) یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید. پ) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۴- عضوی از آن را مشخص کنید.	۷
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	با توجه به گراف (G) به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.	۸
۰/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	در جای خالی عبارت های مناسب بنویسید. یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر نباشد، احاطه می نامیم.	۹
۱ نمره	دی ۱۴۰۱	عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید و ادعای خود را ثابت نمایید.	۱۰
۱ نمره	دی ۱۴۰۱	یک گراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱۱
۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. عدد احاطه گری P_1 برابر عدد ۳ است.	۱۲
۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	جای خالی را عبارت مناسب پر کنید. در یک گراف از مرتبه‌ی p ، اگر $\gamma(G) = 1$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یالها برابر است.	۱۳
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	گراف زیر را در نظر بگیرید. الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال با ۴ عضو بنویسید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید. ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه گری گراف ۲ خواهد شد؟	۱۴
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۲	الف) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۳ داشته باشد.	۱۵



		<p>(ب) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر با اندازه‌ی ۳ داشته باشد.</p>	
<p>۱/۷۵ نمره</p>	<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>گراف مقابل را در نظر بگیرید. الف) عدد احاطه گری گراف را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید. ب) این گراف چند \mathcal{G} - مجموعه دارد؟</p> 	<p>۱۶</p>
<p>۲/۵ نمره</p>	<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>گراف زیر را در نظر بگیرید: الف) عدد احاطه گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید. ج) یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال ۴ عضوی بنویسید.</p> 	<p>۱۷</p>

فصل سوم

((ریاضیات گسسته))



درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که : (الف) کتاب های تاریخ همواره کنار هم باشند. (ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	می خواهیم با ارقام ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۴ و ۳ و ۲ یک عدد ۷ رقمی تولید کنیم به طوری که : (الف) اعداد زوج کنار هم باشند. (ب) هیچ دو عدد زوجی کنار هم نباشند. (خارج کشور)	۲
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	به چند طریق می توان ۴۵ دانش آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار دارد؟	۳
۱ نمره	دی ۱۴۰۱	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر رو به روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟	۴
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	اگر داشته باشیم، $A = \{۷, ۸, ۹\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟	۵
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۲	چهار برادر و سه خواهر می خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادر ها کنار هم قرار بگیرند. آن گاه این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟	۶

جایگشت های با تکرار

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	با ارقام ۹ و ۷ و ۶ و ۵ و ۳ و ۳ و ۱ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	به چند طریق می توان ۷ نفر را در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار داد؟ (خارج کشور)	۲
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسأله ای طرح کنید که پاسخ آن $۷! \times ۴!$ باشد.	۳
۰/۷۵	شهریور	با ارقام ۲ و ۳ و ۱ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ چند کد ۸ رقمی می توان نوشت؟	۴

نمره	۱۴۰۲	
------	------	--

معادلات حسابی

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟	۱
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (خارج کشور)	۲
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را با شرایط داده شده به دست آورید. $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$ ($x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4, x_5 = 2$)	۳
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۱	به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد، به طوری که از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم.	۴
۲ نمره	خرداد ۱۴۰۲	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟	۵
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد. به شرط آن که $x_2 = 4$ و $x_4 \geq 3$ باشد.	۶

مربع های لاتین

۲ نمره	خرداد ۱۴۰۱	الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت ($1 \rightarrow 3$ و $2 \rightarrow 2$ و $3 \rightarrow 4$ و $4 \rightarrow 1$) مربع لاتین B را به دست آورید. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.	۱
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. سطر اول و سوم مربع A را جابجا کنید تا مربع لاتین B حاصل شود. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید. (خارج کشور)	۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	دو مربع لاتین متعامد 3×3 را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید).	۳
۰/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۶ وجود ندارد.	۴

سؤالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایهی دوازدهم ریاضی و فیزیک

۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	قرار است سه مدرس T_1 و T_2 و T_3 در سه جلسه‌ی متوالی در سه کلاس C_1 و C_2 و C_3 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین برنامه ریزی کنید.	۵
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	جای خالی را عبارت مناسب پر کنید. در یک مربع لاتین چرخشی 4×4 ، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر است.	۶
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند، به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هر یک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسأله برنامه ریزی کنید.	۷
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ بنویسید.	۸

فصل سوم

((ریاضیات گسسته))



درس ۲ : روش هایی برای شمارش ، اصل شمول و عدم شمول

۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	چند عضو از مجموعه‌ی $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند؟	۱
۲ نمره	خرداد ۱۴۰۲	چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه‌ی پاسخ نهایی نمی باشد.)	۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که به هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟	۳

نتایج اصل شمول و عدم شمول در تعیین تعداد توابع

۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	به چند طریق می توان ۵ سیب متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد. به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد.	۱
۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد. اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم. (خارج کشور)	۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۷ عضوی را به دست آورید. (راه حل نوشته شود.)	۳
۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	جای خالی را عبارت مناسب پر کنید. تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۳ عضوی به یک مجموعه‌ی ۵ عضوی برابر است.	۴

اصل لانه کبوتری

۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند، لاقلاً ۷ نفر از آن ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از یک باشد. (خارج کشور)	۲
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ ، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است.	۳

سئالات موضوعی نهایی درس ریاضیات گسسته پایهی دوازدهم ریاضی و فیزیک

۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم، ثابت کنید، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها کمتر از $\sqrt{۸}$ است.	۴
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۲	یک نجار در هفته ۴ مدل صندلی در ۳ رنگ متفاوت می سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم، لااقل ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته شده است.	۵

فصل اوّل

((ریاضیات گسسته))



درس ۱: استدلال ریاضی

$n = 2k \rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$	۱
الف) نادرست $\sqrt{5} + (2 - \sqrt{5}) = 2$ ب) درست پ) درست ت) درست	۲
$n = 2k + 1 \rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k + 1)^2 - 5(2k + 1) + 7$ $= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 = 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 = 2q + 1$	۳
الف) نادرست، $n = 3$ مثال نقض می باشد. ب) درست	۴
$a = 2k + 1 \rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 \rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$	۵
اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ اگر زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند، در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسأله، مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.	۵
الف : درست ب : نادرست	۶
$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ $\Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow (y + x)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$ رابطه‌ی بدست آمده همواره بدیهی است. از طرفی چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، لذا حکم ثابت است.	۷
درست ، به کمک برهان خلف اثبات می شود.	۸
$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + z^2 + 1 \geq 0$ $\rightarrow (x - y)^2 + z^2 + 1 \geq 0$ نامساوی بدست آمده همواره بدیهی است، حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، حکم ثابت است.	۹
نادرست؛ ممکن است حاصل ضرب عدد گویا شود. مثلاً: $-\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2$	۱۰
$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$	۱۱

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی بدست آمده ، بدیهی است و چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم برقرار می باشد.

فصل اول

((ریاضیات گسسته))



درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

الف) نادرست	ب) درست	پ) نادرست	۱
			۲
			۳
			۴
			۵
			۶
			۷
			۸
			۹
			۱۰

$\begin{cases} a 2m + 3 \\ a m + 7 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a 2m + 3 \\ a 2m + 14 \end{cases} \rightarrow a (2m + 14) - (2m + 3)$ $\rightarrow a 11 \rightarrow a = 1 \text{ or } a = 11$	۱۱
$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 5q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \rightarrow a = (20q_1 + 15) - (20q_2 + 16)$ $\rightarrow a = 20(q_1 - q_2) + (15 - 16) \rightarrow a = 20q + (-1) \rightarrow a = 20q + (19 - 20)$ $\rightarrow a = 20(q - 1) + 19 \rightarrow a = 20k + 19 \rightarrow r = 19$	۱۲
درست ، چون دو عدد متوالی اند و هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند.	۱۳
الف) نادرست؛ ممکن است a نه b و c را عاد نکند. مثلاً: $5 12 + 8 \nrightarrow 5 12, 5 8$ ب) درست؛ تعریف دو عدد متباین (یا نسبت به هم) اول	۱۴
فرض کنید که b عدد فرد نیابد، پس زوج است. لذا وجود دارد عدد صحیح k که در آن $b = 2k$ $b = 2k \xrightarrow{b a+2} a + 2 = bq \rightarrow a + 2 = 2kq$ $\rightarrow a = 2kq - 2 \rightarrow a = 2(kq - 1) \rightarrow a = 2k'$ <p>که با فرض سؤال در تناقض است.</p>	۱۵
$7 2k + 1 \rightarrow (7)^2 (2k + 1)^2 \rightarrow 49 4k^2 + 4k + 1 \quad (1)$ $7 2k + 1 \xrightarrow{\times 7} 49 14k + 7 \quad (2)$ $\xrightarrow{(1),(2)} 49 (4k^2 + 4k + 1) - (14k + 7) \rightarrow 49 4k^2 - 10k - 6$	۱۶

فصل اوّل

((ریاضیات گسسته))



درس ۲: هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربرد ها

۱	درست														
۲	$27 = 13 \times 2 + 1 \rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \rightarrow (27)^{20} \equiv (1)^{20} \equiv 1 \pmod{13}$ $18 = 13 \times 1 + 5 \rightarrow 18 \equiv 5 \pmod{13}$ $(27)^{20} + 18 \equiv 1 + 5 \pmod{13} \rightarrow (27)^{20} + 18 \equiv 6 \pmod{13} \rightarrow r = 6$														
۳	<p>فاصله ی ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با : $12 + 30 + 30 + 30 + 29 = 131$ است. از طرفی $131 \equiv 5 \pmod{7}$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>ش</td> <td>ی</td> <td>د</td> <td>س</td> <td>چ</td> <td>پ</td> <td>ج</td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </table>	ش	ی	د	س	چ	پ	ج	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ش	ی	د	س	چ	پ	ج									
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶									
۴	الف) $(a, m) b$ ب) $x \in [3]_4$														
۵	<p>از مفهوم هم نهشتی استفاده می کنیم.</p> $1358112 \equiv ? \pmod{9}$ $1358112 \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2 \pmod{9}$ $1358112 \equiv 21 \pmod{9} \xrightarrow{21 \equiv 3} 1358112 \equiv 3 \pmod{9}$ <p>یعنی باقی مانده ۳ می شود.</p>														
۶	<p>اوّل روز ها از اول مهر تا ۷ اسفند را حساب می کنیم :</p> $29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 7 = 156$ $\rightarrow 156 \equiv 2 \pmod{7}$ <p>پس جواب ۲ روز بعد از اولین روز، یعنی شنبه می شود. پس ۷ اسفند می شود دوشنبه</p>														
۷	همه ی اعداد صحیح مانند a که ۵ برابر آنها بعلاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد. به زبان همنهشتی :														

$\begin{aligned} \overset{11}{5a + 9} &= \overset{11}{11k} \rightarrow \overset{11}{5a} \equiv \overset{11}{-9} \\ \rightarrow \overset{11}{5a} &\equiv \overset{11}{-9 - 11} \rightarrow \overset{11}{5a} \equiv \overset{11}{-20} \xrightarrow{(5,11)=1} \overset{11}{a} \equiv \overset{11}{-4} \\ \rightarrow a &= \overset{11}{11k - 4} \quad k \in Z \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">مثلاً: $a = \{\dots, -15, -4, 7, 18, \dots\}$</p>	
<p>عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0$ را بسط می دهیم و در هم نهشتی به پیمانهی ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می دهیم. داریم:</p> $A = 1 \cdot 10^{n-1} a_{n-1} + 1 \cdot 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 1 \cdot 10^2 \times a_2 + 1 \cdot 10 \times a_1 + 1 \cdot 10^0 \times a_0$ $\rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + 1 \times a_{n-2} + \dots + 1 \times a_2 + 1 \times a_1 + 1 \times a_0$ $\rightarrow A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$	۸
$\begin{aligned} \overset{3}{5x + 3y} &= \overset{3}{42} \rightarrow \overset{3}{5x} \equiv \overset{3}{42} \rightarrow \overset{3}{5x} \equiv \overset{3}{0} \rightarrow x \equiv \overset{3}{0} \leftarrow x = 3k \\ \overset{3}{5x + 3y} &= \overset{3}{42} \rightarrow \overset{3}{5(3k)} + \overset{3}{3y} = \overset{3}{42} \rightarrow y = \overset{3}{-5k + 14} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 14 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$	۹
$\begin{aligned} \overset{15}{1!} &= 1 \rightarrow \overset{15}{1!} \equiv 1 \\ \overset{15}{2!} &= 2 \times 1 \rightarrow \overset{15}{2!} \equiv 2 \\ \overset{15}{3!} &= 3 \times 2 \times 1 \rightarrow \overset{15}{3!} \equiv 6 \\ \overset{15}{4!} &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \rightarrow \overset{15}{4!} \equiv 9 \\ \overset{15}{5!} &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \rightarrow \overset{15}{5!} \equiv 0 \end{aligned}$ <p>و چون در سایر موارد عوامل ۳ و ۵ وجود دارد پس بر ۱۵ بخش پذیر می باشند. لذا:</p> $\overset{15}{1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200!} \equiv \overset{15}{1 + 2 + 6 + 9 + 0 + \dots + 0} \equiv \overset{15}{18} \equiv \overset{15}{3}$	۱۰
<p>چون $(4,6) = 2$ و $2 10$ پس معادله دارای جواب است.</p> $\overset{6}{4x} \equiv \overset{6}{10} \rightarrow \overset{6}{4x} \equiv \overset{6}{4} \xrightarrow{(4,6)=2} \overset{3}{x} \equiv \overset{3}{1} \rightarrow x = \overset{3}{3k + 1} \quad ; \quad k \in Z$	۱۱
<p>ابتدا جواب کلی معادله را تعیین می کنیم.</p> $\begin{aligned} \overset{19}{15x} &\equiv \overset{19}{7} \rightarrow \overset{19}{15x} \equiv \overset{19}{45} \xrightarrow{(15,19)=1} \overset{19}{x} \equiv \overset{19}{3} \xrightarrow{\exists k \in Z} x = \overset{19}{19k + 3} \\ \xrightarrow{k=5} &x = \overset{19}{19(5) + 3} \rightarrow x = \overset{19}{98} \end{aligned}$ <p>توجه: می توانستیم بدین شکل نیز عمل کنیم.</p>	۱۲

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی درس ریاضی گسسته پایه‌ی دوازدهم ریاضی و فیزیک

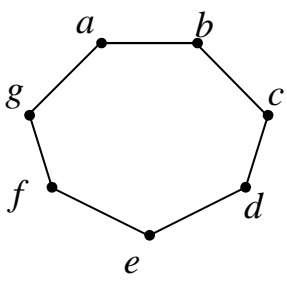
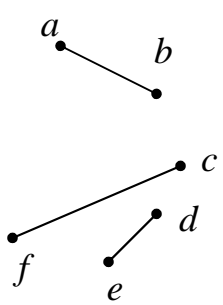
$x < 100 \rightarrow 19k + 3 < 100 \rightarrow 19k < 97 \rightarrow k < \frac{97}{19} \rightarrow k \leq 5$ <p>پس به ازای $k = 5$، داریم:</p> $x = 19(5) + 3 \rightarrow x = 98$	
درست؛ شرط وجود جواب برای یک معادله‌ی همبستگی	۱۳
$63 \equiv -1 \rightarrow (63)^{16} \equiv (-1)^{16} \rightarrow 63^{16} \equiv 1 \rightarrow 63^{16} + 1 \equiv 1 + 1$ $\rightarrow 63^{16} + 1 \equiv 2 \rightarrow A \equiv 2 \rightarrow r = 2$	۱۴
$14 \cdot 2x \equiv 11 \rightarrow (1 + 4 + 0 + 2)x \equiv 1 + 1 \rightarrow 7x \equiv 2 \rightarrow 7x \equiv 2 - 9$ $\rightarrow 7x \equiv -7 \xrightarrow{(7,9)=1} x \equiv -1 \rightarrow x \equiv -1 + 9 \rightarrow x \equiv 8 \rightarrow x = 9k + 8$	۱۵

فصل دوم

((ریاضیات گسسته))



درس ۱: گراف

الف) فرد	ب) تهی	پ) ۶	ت) همبند	۱
الف) مسیر $abcdef$	ب) $N_G(c) = \{b, d\}$			۲
				
الف) رأس منفرد	ب) طوقه	پ) گراف همبند	ت) عددی زوج	۳
الف) $\Delta(G) = 3$	ب) $N_G[a] = \{a, b, c\}$	پ) $acdfba$	ت) درجهی رأس c در گراف مکمل برابر ۳ است. زیرا $6 - (1 + 2) = 3$	۴
				
$q = \binom{p}{2} \rightarrow 36 = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow p(p-1) = 72 \rightarrow p(p-1) = 9 \times 8 \rightarrow p = 9$				۵
الف) $abgc$	ب) $bcdgb$	پ) ۵	ت) خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است. (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد.)	۶
$N_G[f] = \{f\}$				
۲۱				۷
الف) مرتبه	ب) مسیر	پ) $\frac{n(n-1)}{2}$	ت) دور	۸
الف) $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 0$	ب) $bcedb$	ت) $N_G(f) = \{g\}$	پ) $bdce$ یا $bced$ یا $bdec$ یا $bcde$	۹
نادرست، تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی زوج است.				۱۰

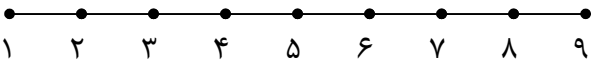
<p>ابتدا تعداد یال های گراف ۸ رأسی ۳- منتظم و همچنین گراف کامل ۸ رأسی را تعیین می کنیم.</p> <p>تعداد یال های گراف ۳- منظم $q = \frac{kn}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$</p> <p>تعداد یال های گراف کامل $q = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$</p> <p>تعداد یال هایی که باید اضافه شوند. $\Rightarrow 28 - 12 = 16$</p>	۱۱
<p>الف) مجموعهی $N_G(g)$، طبق تعریف، شامل رأس های مجاور g می باشند. $N_G(g) = \{f\}$</p> <p>ب) $abcdea$ یا $abdefa$</p> <p>ج) درجهی رأس c در گراف G برابر ۲ می باشد. حال اگر این گراف کامل باشد، درجهی رأس c باید برابر $p-1=7-1=6$ باشد. لذا در گراف \bar{G}، درجهی رأس c برابر $6-2=4$ است.</p>	۱۲
<p>الف) همبند (ب) زوج (ج) $p-1$ (د) k- منتظم</p>	۱۳
<p>الف) $p=7$ و $q=6$</p> <p>ب) $D=2q=12$</p> <p>ج) $N_G[c] = \{a, c, d, e\}$</p> <p>د) $acefa$ (شروع دور از هر رأس نیز درست است.)</p> <p>هـ) $q(\bar{G}) + \deg_{\bar{G}}(g) = 15 + 6 = 21$</p>	۱۴

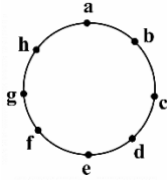
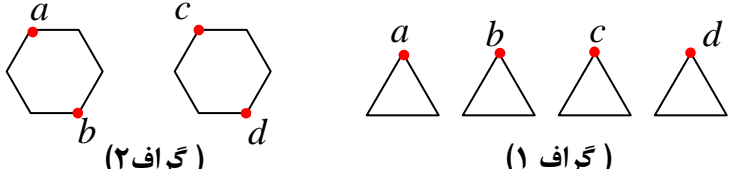
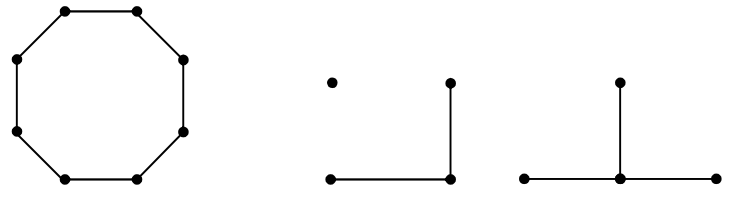
فصل دوم

((ریاضیات گسسته))



درس ۲: مدل سازی با گراف

الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نباشد را احاطه گر مینیمال می نامند. ب) $D = \{h, b, i, a\}$ (مسأله جواب های دیگر نیز دارد).	۱
برای احاطه کردن رئوس a و b و c و d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه گر باشند. زیرا $\left\lceil \frac{5}{3+1} \right\rceil = 2$ برای احاطه کردن رئوس e و f و h حداقل یکی از آنها باید در مجموعه احاطه گر باشند. زیرا $\left\lceil \frac{3}{3+1} \right\rceil = 1$ بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه گری از گراف باشد. یعنی $\gamma(G) \geq 3$. از طرفی مجموعه‌ی $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$.	۲
 $D = \{2, 5, 8\}$	۳
مسأله جواب های متفاوت دارد. از جمله : الف) $D = \{h, c, e\}$ ب) $D = \{g, c, i, e\}$	۴
در گراف داده شده $\Delta = 2$ و $n = 8$ ، رابطه‌ی $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ یک مقدار حداقلی برای عدد احاطه گری می دهد: $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{2 + 1} \right\rceil = 3$ یعنی عدد احاطه گری حداقل ۳ است. با یک بررسی ساده معلوم است که $\{a, b, c\}$ می تواند یک مجموعه‌ی احاطه گر باشد. پس عدد احاطه گری برابر با ۳ است.	۵
الف) $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = 55$ ب) $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{3 + 1} \right\rceil = 2$	۶
الف)	۷

 <p>ب) $D = \{a, d, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال</p>	
<p>الف) $\gamma(G) = 2 \rightarrow \{g, c\}$ ب) $\{h, d, b\}$</p>	۸
<p>مینیمال</p>	۹
<p>می دانیم $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ ، پس داریم $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{4+1} \right\rfloor$ ، بنابراین $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به اینکه $\{a, d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است، لذا $\gamma(G) = 2$</p>	۱۰
<p>هر یک از گراف های زیر می توانند، جواب مسأله باشند. در هر مورد، مجموعه‌ی احاطه گر برابر $\{a, b, c, d\}$ می باشد.</p>  <p>(گراف ۲) (گراف ۱)</p>	۱۱
<p>نادرست، عدد احاطه گری حداقل برابر $4 = \left\lfloor \frac{10}{2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ می باشد. (در گراف های P_n بزرگترین درجه رأس ها برابر ۲ می باشد)</p>	۱۲
<p>$p - 1$</p>	۱۳
<p>برای هر مورد این سؤال ، جواب های درست متفاوت وجود دارد. لذا جواب های زیر را برای مثال ذکر می کنیم.</p> <p>الف) $\{c, e, h, f\}$ ب) $\{c, g, i, e\}$ ج) fh</p>	۱۴
<p>برای هر مورد این سؤال ، جواب های درست متفاوت وجود دارد. لذا جواب های زیر را برای مثال ذکر می کنیم.</p>  <p>(ب) (الف)</p>	۱۵
<p>الف) می دانیم که $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ ، پس داریم ، $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{8}{5+1} \right\rfloor$ در نتیجه، $2 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه ای مانند $\{e, c\}$ (هر کدام از مجموعه های $\{e, b\}$ یا $\{e, d\}$ اگر نوشته شد، درست است.) یک مجموعه‌ی احاطه گر برای گراف G می باشد، پس $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$</p> <p>ب) ۳</p>	۱۶
<p>الف) $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{p}{\Delta + 1} \right\rfloor \rightarrow \gamma(G) \geq 3$ (*)</p>	۱۷

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. بنا به رابطه‌ی $(*)$ ، پس: $\gamma(G) = 3$

ب) $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

یا هر مجموعه‌ی احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر

ج) $C = \{a, e, f, b\}$


یا هر مجموعه‌ی احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر

فصل سوم

((ریاضیات گسسته))



درس ۱: مباحثی در ترکیبات

الف) $6! \times 6!$ ب) $6! \times 5!$	۱
الف) ارقام زوج یعنی ۸ و ۶ و ۴ و ۲ را یک دسته در نظر می‌گیریم. خود این ارقام $4!$ جایجایی دارند. این دسته با بقیه‌ی ارقام ۳ و ۷ و ۹ می‌شوند ۴ دسته که باز هم $4!$ جایجایی دارند. پس می‌شوند $4! \times 4!$	۲
ب) $7! - (4! \times 4!)$	
روش اول: $\binom{45}{8} \times \binom{37}{10} \times \binom{27}{12} \times \binom{15}{15}$ روش دوم: $\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!}$	۳
در هر طرف میز، ۴ نفر قرار می‌گیرند که باهم ۴ حالت دارند.	۴
ولی چون هر نفر باید روی به روی برادرش قرار بگیرد و دو برادر می‌توانند با هم جابجا شوند، لذا در هر نشست دو برادر ۲ حالت وجود دارد. لذا در کل به تعداد $4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$ حالت (روش نشستن) دارند.	
 تعداد حالت های انتخاب دو رقم از A = $\binom{3}{2}$ تعداد حالت های انتخاب چهار حرف از B = $\binom{6}{4}$ و چون کارکترها $(4 + 2 = 6)$ کارکتر را می‌توان جابجا کرد. پس طبق اصل ضرب می‌توان نوشت: $\binom{3}{2} \times \binom{6}{4} \times 6!$	۵
$3! \times 4! \times 2! = 288$	۶

جایگشت های با تکرار

$\binom{9}{3,2,1,1,1} = \frac{9!}{3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 30240$	۱
$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$	۲
<p>۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را به چند طریق می توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد. به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند.</p>	۳
$\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4! \times 3! \times 1!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 5 = 280$	۴

معادلات حسابی

$x_3 = 4, x_5 \geq 3 \rightarrow x_5 = y_5 + 3$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow x_1 + x_2 + 4 + x_4 + y_5 + 3 + x_6 = 12$ $\rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126 \quad \text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی}$	۱
$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \times 6!} = 210$	۲
$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$ $\xrightarrow{x_2=1} x_1 + 4(1) + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$ $\xrightarrow{x_2=0} x_1 + 4(0) + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ <p>تعداد کل جواب ها $36 + 10 = 46$</p>	۳
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 ; x_3 = 3, x_4 \geq 3, x_5 \geq 5$ $\xrightarrow{x_3=3, x_4=y_4+3, x_5=y_5+5} x_1 + x_2 + 3 + (y_4 + 3) + (y_5 + 5) = 16$ $\rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5$ $\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} \quad \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$	۴

۵	$x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2}$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $x_4 = 1 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2}$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $\rightarrow \binom{12}{2} + \binom{10}{2} = 66 + 45 = 111$ تعداد کل جواب های صحیح نامنفی
۶	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \xrightarrow{x_2=4} x_1 + x_3 + x_4 = 8$ $\xrightarrow{x_4-3=y_4} x_1 + x_3 + y_4 = 5$ $\rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$ تعداد جواب های صحیح نامنفی

مربع های لاتین

۱	(الف)	$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
۲	(ب)	$\begin{bmatrix} 34 & 41 & 13 & 22 \\ 22 & 13 & 41 & 34 \\ 13 & 22 & 34 & 41 \\ 41 & 34 & 22 & 13 \end{bmatrix}$ <p>متعامد نیستند. زیرا در مربع تلفیقی دو مربع لاتین عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>
۲	جابجایی سطر اول و سوم	$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ <p>مربع تلفیقی</p> $\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 13 & 21 & 32 \\ 22 & 33 & 11 \\ 31 & 12 & 23 \end{bmatrix}$ <p>چون هیچ دو عدد ۲ رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع لاتین A و B متعامدند.</p>

۳	<p>دو مربع زیر متعامد هستند، زیرا اگر مربع تلفیقی را تشکیل عدد تکراری نداریم.</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳																														
۱	۲	۳																																															
۲	۳	۱																																															
۳	۱	۲																																															
۳	۱	۲																																															
۲	۳	۱																																															
۱	۲	۳																																															
۴	درست																																																
۵	<p>فرض کنیم هر سطر نشان دهنده‌ی هر کلاس و اعداد ۱ و ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین 3×3 مقابل، هر مدرس در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد.</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱																																							
۱	۲	۳																																															
۳	۱	۲																																															
۲	۳	۱																																															
۶	۴، زیرا در چنین مربعی تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ هستند.																																																
۷	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>a</th> <th>b</th> <th>c</th> <th></th> <th>a</th> <th>b</th> <th>c</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>شنبه</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>شنبه</td> <td>۱</td> <td>۳</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>یکشنبه</td> <td>۳</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>یکشنبه</td> <td>۳</td> <td>۲</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>دوشنبه</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۱</td> <td>دوشنبه</td> <td>۲</td> <td>۱</td> <td>۳</td> </tr> </tbody> </table> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>a</th> <th>b</th> <th>c</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>شنبه</td> <td>۱۱</td> <td>۲۳</td> <td>۳۲</td> </tr> <tr> <td>یکشنبه</td> <td>۳۳</td> <td>۱۲</td> <td>۲۱</td> </tr> <tr> <td>دوشنبه</td> <td>۲۲</td> <td>۳۱</td> <td>۳۱</td> </tr> </tbody> </table>		a	b	c		a	b	c	شنبه	۱	۲	۳	شنبه	۱	۳	۲	یکشنبه	۳	۱	۲	یکشنبه	۳	۲	۱	دوشنبه	۲	۳	۱	دوشنبه	۲	۱	۳		a	b	c	شنبه	۱۱	۲۳	۳۲	یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱	دوشنبه	۲۲	۳۱	۳۱
	a	b	c		a	b	c																																										
شنبه	۱	۲	۳	شنبه	۱	۳	۲																																										
یکشنبه	۳	۱	۲	یکشنبه	۳	۲	۱																																										
دوشنبه	۲	۳	۱	دوشنبه	۲	۱	۳																																										
	a	b	c																																														
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲																																														
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱																																														
دوشنبه	۲۲	۳۱	۳۱																																														
۸	<p>دو مربع لاتین متفاوت را متعامد گوئیم، هرگاه مربع حاصل از تلفیق آنها، درایه‌های تکراری نداشته باشد.</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>$A =$</td> <td><table border="1"><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table></td> <td>$B =$</td> <td><table border="1"><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table></td> <td>$\Rightarrow A \ominus B =$</td> <td><table border="1"><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr></table></td> </tr> </table>	$A =$	<table border="1"><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table>	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۱	۲	۳	$B =$	<table border="1"><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table>	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	$\Rightarrow A \ominus B =$	<table border="1"><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr></table>	۲۳	۳۱	۱۲	۳۲	۱۳	۲۱	۱۱	۲۲	۳۳															
$A =$	<table border="1"><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table>	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۱	۲	۳	$B =$	<table border="1"><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table>	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	$\Rightarrow A \ominus B =$	<table border="1"><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr></table>	۲۳	۳۱	۱۲	۳۲	۱۳	۲۱	۱۱	۲۲	۳۳																	
۲	۳	۱																																															
۳	۱	۲																																															
۱	۲	۳																																															
۳	۱	۲																																															
۲	۳	۱																																															
۱	۲	۳																																															
۲۳	۳۱	۱۲																																															
۳۲	۱۳	۲۱																																															
۱۱	۲۲	۳۳																																															

فصل سوم

((ریاضیات گسسته))



درس ۲: روش هایی برای شمارش، اصل شمول و عدم شمول

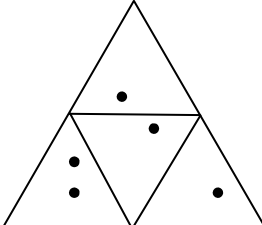
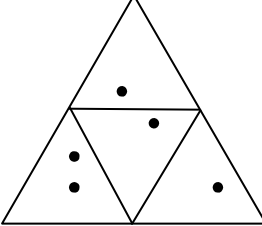
$S = \{1, 2, 3, \dots, 630\} \rightarrow S = (630 - 1) + 1 = 630$ $A = \{3, 6, 9, \dots, 630\} \rightarrow A = \frac{630 - 3}{3} + 1 = 210$ $B = \{5, 10, 15, \dots, 630\} \rightarrow B = \frac{630 - 5}{5} + 1 = 126$ $A \cap B = \{15, 30, 45, \dots, 630\} \rightarrow A \cap B = \frac{630 - 15}{15} + 1 = 42$ $ \overline{A \cup B} = S - A \cup B = S - (A + B - A \cap B)$ $ \overline{A \cup B} = 630 - (210 + 126 - 42) = 336$	۱
$ S = 5^4 = 625 \quad \text{تعداد کل رمزها}$ $ A = 4^4 = 256 \quad \text{تعداد رمزهای فاقد ۳}$ $ B = 4^4 = 256 \quad \text{تعداد رمزهای فاقد ۴}$ $ A \cap B = 3^2 = 9 \quad \text{تعداد رمزهای فاقد ۳ و ۴}$ $ A \cup B = A + B - A \cap B = 4^4 + 4^4 - 3^2 = 256 + 256 - 9 = 503$ <p style="text-align: right;">تعداد رمزهای فاقد ۲ یا ۳</p> $ \overline{A \cap B} = S - A \cup B = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^2) = 625 - 503 = 122$ <p style="text-align: right;">تعداد رمزهای دارای ۲ یا ۳ یا هر دو</p>	۲
$ A = \left[\frac{500}{5} \right] = 100 \quad \text{و} \quad B = \left[\frac{500}{4} \right] = 125 \quad \text{و} \quad A \cap B = \left[\frac{500}{20} \right] = 25$ $ \overline{A \cap B} = A \cup B = 500 - (100 + 125 - 25) = 300$	۳

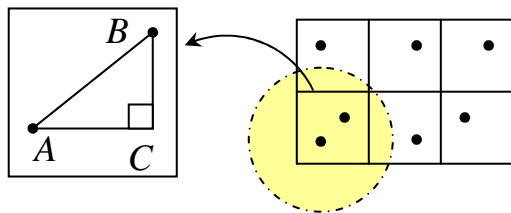
نتایج اصل شمول و عدم شمول در تعیین تعداد توابع

<p>این سؤال با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی می‌توان نوشت.</p>	۱
---	---

$3^5 - 3(3^5 - 1) = 243 - 3(32 - 1) = 243 - 3(31) = 243 - 93 = 150.$	
<p>اینکه می‌خواهیم ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کنیم، به شرط آنکه هر نفر حداکثر یک کتاب داشته باشد، مثل نوشتن تعداد توابع یک به یک است از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی (افراد) به مجموعه‌ی ۸ عضوی (کتابها)</p> $P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720.$	۲
<p>اگر فرض کنیم، $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$، برای تعریف f روی هر عضو A، هفت انتخاب داریم. بنابر اصل ضرب تعداد کل تابع‌های یک به یک برابر است</p> $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{2!} = 2520 \text{ با}$ <p>روش دوم:</p> $P(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520.$	۳
$P(7,5) = \frac{5!}{2!} = 60.$	۴

اصل لانه کبوتری

<p>تعداد کبوترها برابر ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها برابر حاصل ضرب تعداد ماه‌های سال در تعداد روزهای هفته، یعنی $n = 12 \times 7 = 84$ است. طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم.</p> $kn + 1 = \text{تعداد کبوترها}$ $\rightarrow 505 = k \times 84 + 1 \rightarrow k = 6 \rightarrow k + 1 = 7$ <p>در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p>	۱
 <p>مانند شکل زیر مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکتر و به ضلع ۱ تبدیل می‌کنیم. اگر نقطه‌ها را کبوتر و هر یک از مثلث‌های کوچک را لانه فرض کنیم، چون $4 > 5$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار می‌گیرند. این یعنی فاصله‌ی این دو نقطه کمتر از یک است.</p>	۲
 <p>مانند شکل زیر مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکتر و به ضلع ۱ تبدیل می‌کنیم. ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک به ضلع یک را لانه در نظر می‌گیریم. چون $5 > 4$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (مثلث) وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد.</p>	۳
<p>ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هر نقطه را یک کبوتر در نظر می‌گیریم. حال چون $7 > 6$، پس طبق اصل لانه کبوتری، دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است. در نتیجه، با توجه قضیه‌ی فیثاغورس داریم:</p>	۴



$$\begin{cases} AC < 2 \rightarrow AC^2 < 4 \\ BC < 2 \rightarrow BC^2 < 4 \end{cases} \xrightarrow{+} AC^2 + BC^2 < 4 + 4$$

$$\xrightarrow{AB^2 = AC^2 + BC^2} AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$$

$$k + 1 = 3 \rightarrow k = 2$$

$$n = 3 \times 4 = 12$$

$$\rightarrow kn + 1 = 12 \times 2 + 1 = 25$$

۵